

Électromagnétisme

Chapitre 10 - Rayonnement d'un dipôle oscillant

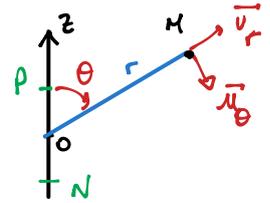
Quelques rappels : en électrostatique, on a introduit la notion de dipôle dans le cas d'une distribution de charge globalement neutre, dans laquelle le barycentre des charges positives P n'est pas confondu avec le barycentre des charges négatives N . On a alors introduit le vecteur moment dipolaire :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP} = \sum_i q_i \overrightarrow{OM}_i \quad (\text{cas général})$$

Dans le cadre de l'approximation dipolaire : $r \gg NP$ et le potentiel créé par le dipôle peut s'écrire sous la forme :

$$V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 NM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM} \Rightarrow V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$



Dans le cas où les charges sont en mouvement, le vecteur moment dipolaire dépend du temps :

$$\vec{p} = \vec{p}(t) \Rightarrow \vec{E}(t) \Rightarrow \vec{B}(t)$$

Maxwell - Ampère

On parle de dipôle oscillant lorsque :

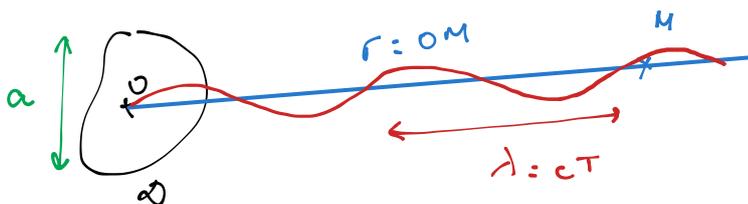
$$\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z \quad (\text{éventuellement } e^{i\omega t})$$

Tout vecteur $\vec{p}(t)$ peut s'écrire comme la somme de dipôles oscillants, d'où l'intérêt de l'étude du champ rayonné par ce dernier (principe de superposition).

↳ équations de Maxwell linéaires + transformée de FOURIER

I. Caractéristiques du champ rayonné

1. Distances caractéristiques du problème



On se place dans le cas :

$$a \ll \lambda \ll r$$

- L'hypothèse $a \ll r$ correspond à l'**approximation dipolaire** (comme en électrostatique).
- $\lambda \ll r$: on se place dans la **zone de rayonnement** (la zone $\lambda \leq r$ correspond au champ proche). On peut alors écrire :

$$\frac{\lambda}{c} \ll \frac{r}{c} \quad (\lambda = cT)$$

Le temps de propagation r/c n'est pas négligeable devant T période caractéristique d'évolution de $p(t)$ (on n'est pas dans l'ARQS ...).

- $a \ll \lambda$ avec $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. Cette dernière hypothèse peut ainsi s'écrire :

$$v \ll \omega a \ll c \quad \vec{NP} = a \cos(\omega t) \vec{u}_z \rightarrow a \omega \ll c$$

La vitesse de déplacement des charges à l'origine de $p(t)$ est petite devant la célérité de la lumière, on parle d'**approximation non relativiste**.

Ordres de grandeur :

— Dans le cas d'un atome dans lequel le nuage électronique se déforme sous l'action d'un champ extérieur (UV-visible).

$$a \simeq 10^{-10} \text{m}$$

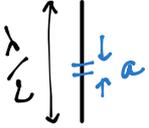
$$\lambda \simeq 0,1 \mu\text{m} \gg a$$

La condition $r \gg \lambda$ est peu contraignante.

— Dans le cas d'une antenne radio :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3 \text{m}$$

$$\nu = 100 \text{MHz} \Rightarrow \lambda = 3 \text{m}$$



On peut se placer dans le cas $r \gg \lambda$ mais la taille de l'antenne est en général de $\lambda/2$ ou $\lambda/4$
 Idée : on considère dans ce cas l'antenne comme une somme de petits dipôles déphasés les uns par rapport aux autres.

2. Principe du calcul

Idée : on se place dans le cas d'un dipôle NP avec une charge $\pm q(t) = Q \cos(\omega t)$. On peut écrire le potentiel électrique :

$$V(M, t) = \frac{Q \cos(\omega(t - r_P/c))}{4\pi\epsilon_0 r_P} - \frac{Q \cos(\omega(t - r_N/c))}{4\pi\epsilon_0 r_N}$$

On écrit ensuite :

$$r_P = r - \frac{a}{2} \cos \theta ; r_N = r + \frac{a}{2} \cos \theta$$

On pose :

$$f(r) = \frac{\cos(\omega(t - r/c))}{r}$$

$$f(r + \epsilon) = f(r) + \epsilon f'(r)$$

$$\epsilon = r_P - r$$

Et on effectue un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$f(r_P) = f(r) + (r_P - r)f'(r)$$

On obtient alors :

$$V(M, t) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\omega \sin(\omega(t - r/c))}{rc} + \frac{\cos(\omega(t - r/c))}{r^2} \right) \quad \text{avec } p_0 = Qa$$

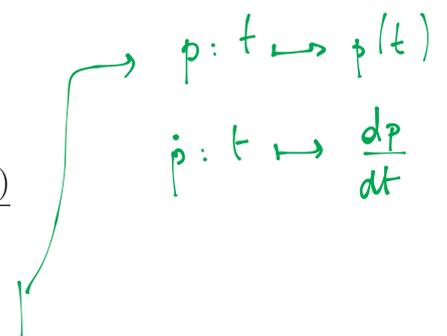
Si on compare les ordres de grandeur des deux termes dans la parenthèse :

$$\frac{\omega/rc}{1/r^2} = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1$$

Dans la zone de rayonnement, le potentiel s'écrit alors :

$$V(M, t) = -\frac{p_0 \cos \theta \omega \sin(\omega(t - r/c))}{4\pi\epsilon_0 rc}$$

$$\Rightarrow V(M, t) = \frac{\dot{p}(t - r/c) \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 rc}$$



La suite du calcul suit la même méthode (il faut faire attention car on n'a plus $\vec{E} = -\text{grad}V$).

$$\text{car } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$$

3. Champ électromagnétique rayonné

On obtient ensuite les expressions des champs \vec{E} et \vec{B} dans la zone de rayonnement :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin\theta \vec{u}_\theta$$

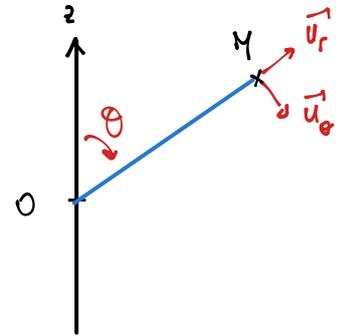
$$\vec{B}(M, t) = \mu_0 \frac{\ddot{p}(t - r/c)}{4\pi r c} \sin\theta \vec{u}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M, t) = -\omega^2 p_0 \frac{\cos(\omega(t - r/c))}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \sin\theta \vec{u}_\theta$$

Soit :

$$\vec{E}(M, t) = -\omega^2 \mu_0 p_0 \frac{\cos(\omega(t - r/c))}{4\pi r} \sin\theta \vec{u}_\theta$$

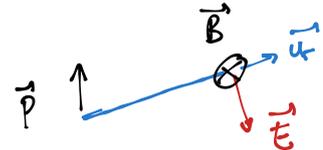
$$\Rightarrow \vec{B}(M, t) = -\omega^2 \mu_0 p_0 \frac{\cos(\omega(t - r/c))}{4\pi r c} \sin\theta \vec{u}_\varphi$$



Commentaires :

- On a une onde se propageant suivant \vec{u}_r qui ressemble à une onde sphérique (s'il n'y avait pas le $\sin\theta$).
- On peut écrire :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$



L'onde a **localement** une structure d'onde plane se propageant suivant \vec{u}_r .

- C'est la dérivée seconde de $p(t)$ qui intervient : seules les charges **accélérées** rayonnent. Application : production de rayons X dans les synchrotrons.
- Lien avec les invariances et symétries :
 - \vec{E} et \vec{B} ne dépendent pas de φ ;
 - \vec{B} est nul sur l'axe (Oz) ;
 - dans le plan $\theta = \pi/2$ (plan d'antisymétrie), \vec{E} est orthogonal au plan alors que \vec{B} est contenu dans le plan ;
 - Dans un plan $\varphi = \text{constante}$ (plan de symétrie) : \vec{B} est orthogonal au plan alors que \vec{E} est contenu dans le plan.
- Les champs décroissent en $1/r$ (contre $1/r^3$ en statique).

II. Puissance rayonnée

1. Vecteur de Poynting

On exprime le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{\Pi} = \omega^4 \frac{\mu_0}{16\pi^2} p_o^2 \frac{\cos^2(\omega(t - r/c))}{r^2 c} \sin^2 \theta \vec{u}_r$$

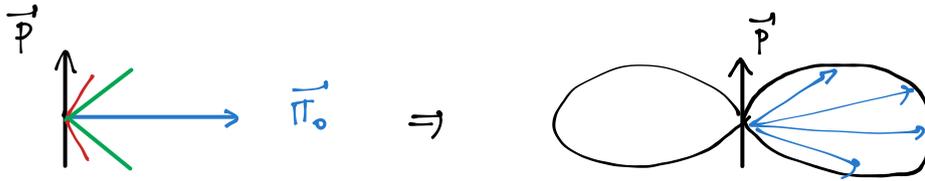
La valeur moyenne temporelle :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{r^2} \left(\frac{\mu_0 p_o^2}{32\pi^2 c} \right) \vec{u}_r$$

partie importante

On peut tracer le diagramme de rayonnement du dipôle : $\| \langle \vec{\Pi} \rangle \|$ en fonction de θ à r et φ fixés.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \pi_0 \sin^2 \theta \vec{u}_r \quad \theta = 45^\circ \quad \| \langle \vec{\Pi} \rangle \| = \frac{\pi_0}{2} \quad \theta = 30^\circ \quad \| \langle \vec{\Pi} \rangle \| = \frac{\pi_0}{4}$$



La puissance rayonnée est nulle dans l'axe du dipôle ($\theta = 0^\circ$) et maximale pour $\theta = 90^\circ$.

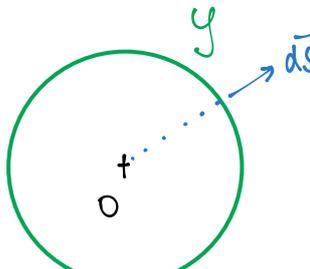
Application : polarisation par réflexion on considère une onde électromagnétique arrivant sur une surface métallique plane.



Après une réflexion à 45° sur une surface métallique, l'onde est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

2. Bilan énergétique

On considère une sphère de centre O de rayon r . On calcule la puissance moyenne traversant S :



$$P = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{u}_r$$

$$\mathcal{P} = \frac{\omega^4 \mu_0 p_0^2}{32 \pi^2 c} \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \rightarrow 4/3$
 $\int_0^{2\pi} d\varphi \rightarrow 2\pi$

$$\rightarrow \mathcal{P} = \frac{\omega^4 \mu_0 p_0^2}{12 \pi c}$$

— La puissance moyenne ne dépend pas du rayon r . Ce résultat est lié à l'absence de matière autour du dipôle. En prenant la valeur moyenne temporelle de l'équation de Poynting, on obtient :

$$\text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \Rightarrow \text{div}(\langle \vec{\Pi} \rangle) = 0 \quad \text{pour } \vec{j} = \vec{0}$$

Ce résultat permet de retrouver la dépendance en $1/r$ des champs \vec{E} et \vec{B} .

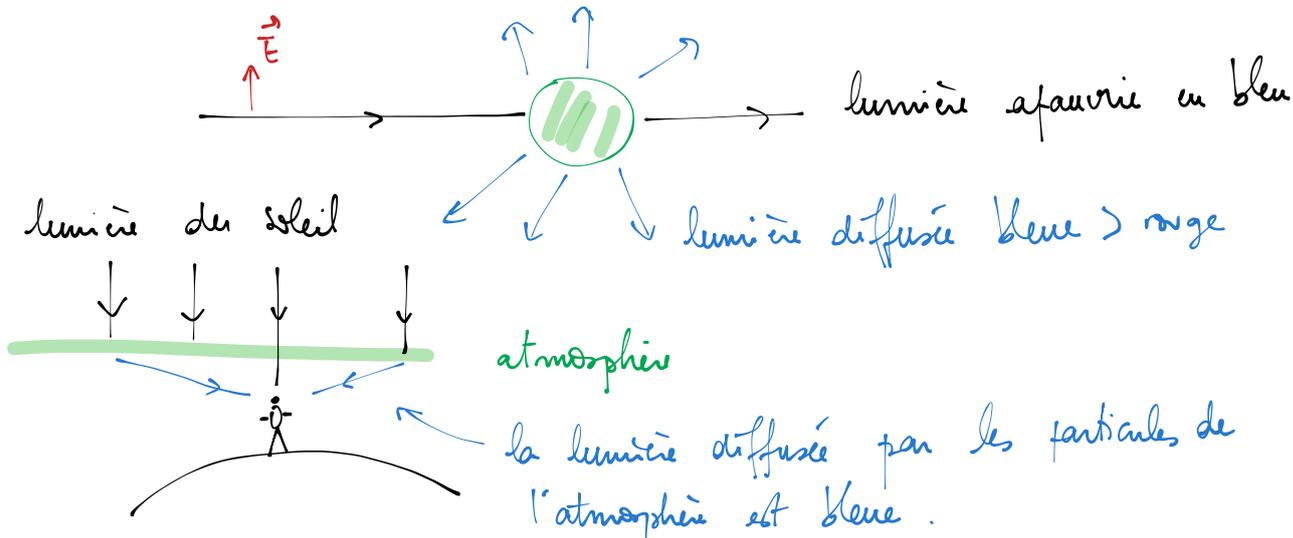
— \mathcal{P} varie en ω^4 ou $1/\lambda^4$. La puissance diffusée dans le bleu-violet est $2^4 = 16$ fois plus grande que celle diffusée dans le rouge (on parle de diffusion Rayleigh).

3. Application : couleur du ciel



nuage électronique } = dipôle oscillant en présence d'un champ \vec{E}_ω externe de pulsation ω (supposé uniforme au niveau de l'atome car $\lambda \gg a$).

visible $\sim 10^{-7} \text{ m}$ $\sim 10^{-10} \text{ m}$



lumière du soleil

atmosphère

lumière diffusée bleue > rouge

la lumière diffusée par les particules de l'atmosphère est bleue.