Mécanique
Chapitre 7 - Mouvement dans un champ de force centrale conservatif

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Soit O un point fixe de $\mathcal{R}$ et M un point matériel de masse m.
On considère dans ce chapitre que le point M est soumis à la force $\vec{F}$ **centrale** et conservative. Une force est dite centrale, lorsque sa direction passe à tout instant par un point O appelé centre de force ($\vec{F}$ est ainsi colinéaire à tout instant au vecteur $\overrightarrow{OM}$). Les exemples que nous allons rencontrer font intervenir la **force de gravitation** et la **force électrostatique**.

Soient deux masses ponctuelles : m_1 en O et m_2 en M, la force de gravitation subie par M s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_1\ m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

$\mathcal{G}$ désignant la **constante de gravitation universelle**. Elle est conservative et on peut lui associer l'énergie potentielle :

$$E_{p,grav} = -\mathcal{G}\frac{m_1\ m_2}{r}$$

Soient deux charges ponctuelles : q_1 en O et q_2 en M, la force électrostatique subie par M s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{F} = \frac{q_1\ q_2}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{u}_r$$

ε_o désignant la **permittivité du vide**. Elle est conservative et on peut lui associer l'énergie potentielle :

$$E_{p,elec} = \frac{q_1\ q_2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

Ces deux forces sont dites forces **newtoniennes** (variation en $1/r^2$). La force gravitationnelle est toujours attractive, la force électrostatique peut être attractive ou répulsive suivant le signe de $q_1\ q_2$.

Exercice : déterminer la valeur de $\mathcal{G}$ sachant que la masse de la Terre $m_T = 6.10^{24}$kg et que le rayon terrestre vaut $6,4.10^3$km [1].

1. On trouve $\mathcal{G} = 6,7.10^{-11}$S.I.

I. Caractéristiques d'un mouvement à force centrale

1. Loi du moment cinétique et conséquences

On applique la loi du moment cinétique en O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

avec :

$$\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

La force $\vec{F}$ est **centrale**, le moment en O de $\vec{F}$ est donc nul :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$$

> Le vecteur moment cinétique en O, $\vec{L}_O(M)$, d'un point matériel M soumis à la force centrale $\vec{F}$ est constant au cours du mouvement. On dit qu'il est **conservatif**.

Ce résultat a trois conséquences importantes :

- Soit $\vec{u}_z$ la direction, constante, du vecteur $\vec{L}_O(M)$. Comme $\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge\ m\vec{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ sont donc en permanence perpendiculaires à cette direction. Le mouvement a ainsi lieu dans le **plan passant par le point O, orthogonal à $\vec{u}_z$**. On choisit alors d'utiliser les **coordonnées cylindriques** pour étudier le mouvement.
- On peut alors écrire :

  $$\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_r$$

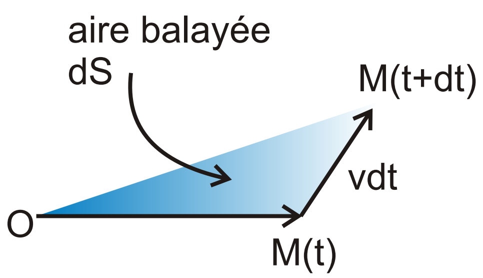
  $$\vec{v} = \dot{r}\ \vec{u}_r + r\dot{\theta}\ \vec{u}_\theta$$

  $$\Rightarrow \vec{L}_O(M) = mr^2\dot{\theta}\ \vec{u}_z$$

  Comme $\vec{L}_O(M)$ est constant, on introduit la **constante des aires** c :

  $$c = r^2\ \dot{\theta}$$

  Lorsque r est grand, $\dot{\theta}$ est faible (et réciproquement), le sens de la rotation autour du point O (lié au signe de $\dot{\theta}$) ne peut pas changer au cours du mouvement.
- D'un point de vue géométrique, le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}dt$ peut être relié à l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant le temps dt. La conservation du moment cinétique se traduit également par la loi des aires : le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaie des aires égales pendant des temps égaux.



2. Aspects énergétiques

On s'intéresse maintenant au cas où $\vec{F}$ est une force centrale **conservative**. L'**énergie mécanique** E_m du point M est alors constante au cours du mouvement (on dit aussi qu'elle est conservative). On peut parfois analyser le mouvement sans calculs en raisonnant sur l'énergie mécanique.

On a en coordonnées cylindriques :

$$\vec{F} = F \ \vec{u}_r$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr \ \vec{u}_r + r \ d\theta \ \vec{u}_\theta$$

On peut donc exprimer le travail élémentaire de la force $\vec{F}$:

$$\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

$$\delta W = F \ dr$$

Si $\vec{F}$ est conservative, alors il existe E_p **énergie potentielle** telle que :

$$\delta W = -dE_p$$

On peut ainsi relier F et E_p par la relation :

$$F = -\frac{dE_p}{dr}$$

F et E_p sont des fonctions de r uniquement.

L'**énergie cinétique** de M :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

v^2 représente la norme du vecteur $\vec{v}$ au carré. Comme le mouvement est plan, on peut écrire en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r(t) \ \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v} =$$

$$\Rightarrow E_c =$$

On utilise ensuite le fait que r et $\dot{\theta}$ sont reliés par la constante des aires :

$$c = r^2\dot{\theta}$$

pour exprimer l'énergie mécanique en fonction de r et $\dot{r}$ uniquement :

$$E_c =$$

$$E_m =$$

On introduit alors l'**énergie potentielle effective**, qui ne dépend que de la variable r :

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{mc^2}{r^2} + E_p(r)$$

On a ainsi :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}$$

Le terme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ étant positif, le mouvement doit se faire de façon à avoir :

$$E_m \geq E_{p,\text{eff}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$$

Exemples :

Dans le cas de la force de gravitation ou de la force électrostatique (E_p en $1/r$), on peut montrer que la trajectoire de M peut être :

— un cercle de centre O [2] ;
— une ellipse dont O est un des foyers ;
— une parabole ;
— une hyperbole.

2. On rappelle que le point O doit nécessairement appartenir au plan de la trajectoire.

II. Application : attraction gravitationnelle

On considère cette fois le cas où le point matériel M de masse m est soumis au champ de gravitation d'un point matériel O de masse m_O.

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_O\ m}{r^2}\ \vec{u}_r$$

$$E_p = -\mathcal{G}\frac{m_O\ m}{r}$$

- O peut représenter le Soleil et M une planète du système solaire : l'étude a alors lieu dans le référentiel **héliocentrique** ;
- O peut représenter la Terre et M un satellite, une comète, ... : on se place dans ce cas dans le référentiel **géocentrique**...

1. Mouvement circulaire

Le cas du mouvement circulaire doit être parfaitement maîtrisé.
On considère ici que le point M suit une trajectoire circulaire de centre O de rayon R :

$$\overrightarrow{OM} = R\ \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\ \vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = v\ \vec{u}_\theta$$

On écrit l'accélération de M :

$$\vec{a} =$$

$$\vec{a} =$$

On applique le PFD :

$$m\ \vec{a} = \vec{F}$$

Le mouvement circulaire est uniforme : la vitesse v est constante (on aurait pu déduire ce résultat de la constante des aires c : si $r = R$ est constant alors $\dot{\theta}$ est constant également car $c = r^2\dot{\theta}$). Le temps T nécessaire pour faire un tour :

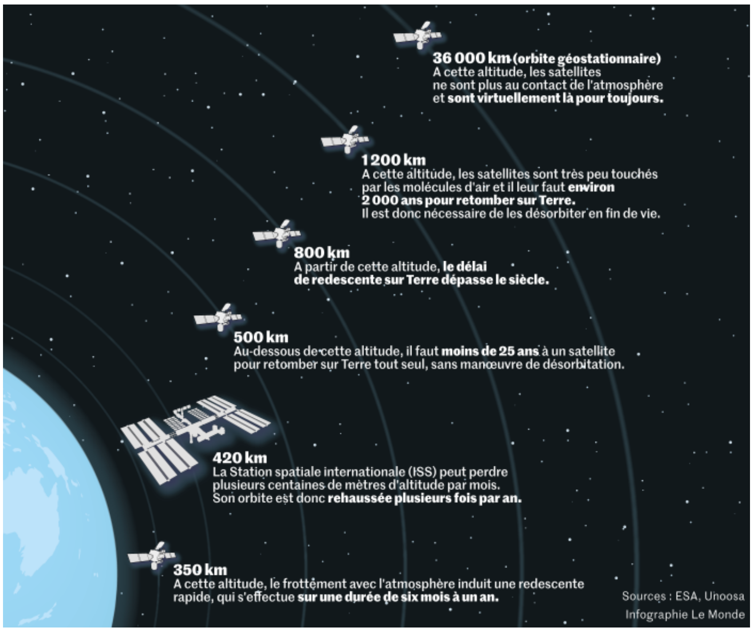
$$T =$$

D'où :

$$\frac{T^2}{R^3} =$$

Applications :

1. Déterminer le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire. Justifier qu'un tel satellite se trouve nécessairement dans le plan de l'équateur.
2. Vitesses cosmiques :
   (a) On appelle vitesse en orbite basse, la vitesse d'un satellite en trajectoire circulaire rasante ($R \simeq R_T$). Exprimer cette vitesse v_1 en fonction de g accélération de la pesanteur et R_T.
   (b) La vitesse de libération v_2 est la vitesse nécessaire pour quitter l'attraction terrestre depuis un point au contacte de la Terre. Exprimer v_2 en fonction de v_1.



Aspects énergétiques : Dans le cas du mouvement circulaire ;

— L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Or :

$$v^2 =$$

On peut donc écrire :

$$E_c =$$

— L'énergie potentielle :

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{m_O \, m}{R}$$

— L'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p$$

$$\Rightarrow E_m =$$

Il est intéressant de savoir retrouver rapidement ce résultat qui peut être transposé au mouvement elliptique.

2. Lois de Kepler

Dans le référentiel héliocentrique :

— Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers. *On appelle écliptique le plan correspondant à la trajectoire de la Terre autour du Soleil. Les orbites des autres planètes du système solaire sont dans des plans peu inclinés par rapport au plan de l'écliptique. Parmi les planètes, Uranus a la particularité d'avoir son axe de rotation couché par rapport à son orbite solaire.*

— Le rayon vecteur $\overrightarrow{SP}$ (S : Soleil, P : planète) décrit des aires égales pendant des temps égaux.

— Le demi grand axe a de l'ellipse est relié à la période de révolution de la planète par la relation :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_{\mathcal{S}}}{4\pi^2}$$

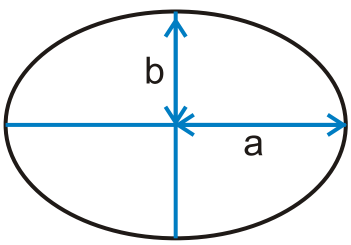
En déduire une estimation de la masse M_S du Soleil.[3]

Commentaires :

— On caractérise les ellipses par leur excentricité e qui est comprise entre 0 et 1. Plus l'excentricité est proche de 0 et plus l'ellipse se rapproche d'un cercle. L'excentricité de l'orbite terrestre varie au cours du temps et est de l'ordre de 0,017 : on peut considérer en première approximation que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est circulaire.

— On peut retrouver le membre de droite de la troisième loi de Kepler à l'aide des résultats obtenus dans le cas du mouvement circulaire en remplaçant le rayon R par le demi grand axe a. Cela fonctionne également pour trouver l'énergie mécanique dans le cas d'une trajectoire elliptique :

$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}m_O m}{a}$$



3. On trouve $M_S = 2.10^{30}$kg.

III. Exemple d'état libre : diffusion de Rutherford

En 1898, *J. J. Thomson* fait l'hypothèse que les atomes sont constitués d'électrons emprisonnés dans une sorte de gelée de charges positives. Ce modèle est appelé modèle du "plum pudding", car *J. J. Thomson* compare les électrons aux raisins du célèbre dessert anglais. Le physicien *Jean Perrin* imagine, quant à lui, l'atome à l'image du système solaire. Il suppose que les électrons gravitent, à des distances immenses, autour d'un « soleil » d'électricité positive, sur des orbites pour lesquelles force coulombienne et force d'inertie s'équilibrent.

En 1909, *Ernest Rutherford*, procède à une série d'expériences dans lesquelles un faisceau de particules alpha (noyaux d'hélium 4 : ${}_{2}^{4}He$), ayant toutes la même énergie cinétique, est lancé contre une mince feuille d'or. Il observe que la majorité des particules alpha traversent la feuille d'or, mais qu'une faible proportion d'entre elles « rebondit » sur celle-ci. Le but de cette partie est de déterminer quel modèle est en accord avec cette observation expérimentale.

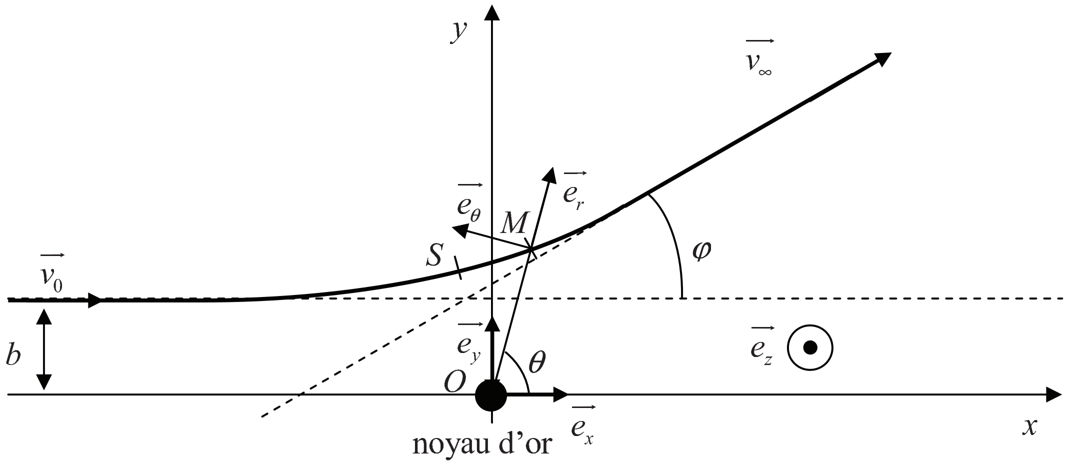


FIGURE 1 – Extrait du sujet CCINP PC 2019