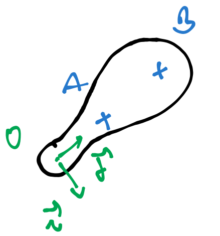
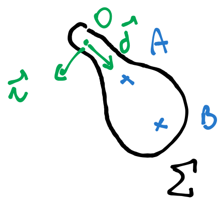
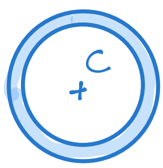
Mécanique
Chapitre 1 - Lois du frottement solide

- Un **solide indéformable** Σ est un solide idéal pour lequel, pour tous points A et B appartenant au solide, la distance AB reste **constante**.
- Un point est **lié au solide** s'il reste à distance constante de tous les points du solide. *Même s'il n'y a pas de matière en ce point : par exemple C le centre d'un cerceau est lié au cerceau.*
- Soient A et B deux points liés au solide Σ, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est lié au solide.
- On peut ainsi définir un **référentiel** $\mathcal{R}$ lié au solide Σ par la donnée d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.







I. Cinématique du solide

1. Vecteur rotation

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur lié au solide. La distance AB ne peut pas varier au cours du mouvement du solide, on a donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2\right) = 0$$

$\|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB}\cdot\vec{AB}$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$$

$\rightarrow \frac{d\vec{AB}}{dt} \perp \vec{AB}$

On introduit le **vecteur rotation** $\vec{\Omega}$ tel que :

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AB}$$

On en déduit la formule de Varignon qui lie les vitesses de deux points liés au solide :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AB}$$

Le mouvement d'un solide Σ est ainsi décrit par la donnée de son vecteur rotation $\vec{\Omega}$ et de la vitesse d'un de ses points (en général son centre de gravité G).

Théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{R}_{ext}}_{\text{résultante des actions extérieures}}$$

$\vec{p} = m_{tot}\,\vec{v}_G$

Théorème du moment cinétique en O fixe

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{O,ext}}_{\text{moment en O des actions ext}}$$

Théorème de la puissance cinétique

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext}$$

$\mathcal{P} = \vec{F}_A\cdot\vec{v}_A$ $\quad$ $\mathcal{P} = \vec{\mathcal{M}}_O\cdot\vec{\Omega}$

2. Solide en translation

Dans le cas d'un solide en translation, le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ est nul : tous les points du solide ont la même vitesse $\vec{v}_G$. On a alors :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{p} = m_{tot}\vec{v}_G \\ \vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m_{tot}\vec{v}_G \\ \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m_{tot}v_G^2\end{gathered}}$$

Un solide en translation se comporte comme un point matériel G de masse m_{tot}.

Son poids $\vec{P} = m_{tot}\vec{g}$ s'applique au point G. Les autres actions mécaniques peuvent être des forces qui s'appliquent en un point du solide, des forces surfaciques qui s'exercent sur la surface du solide, des forces volumiques.

3. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans le cas où le solide est en rotation autour d'un axe (Oz) fixe par rapport au référentiel d'étude :

$$\vec{\Omega} = \omega(t)\vec{u}_z$$
$$\vec{v}_O = \vec{0}$$

Soit A un point lié au solide, $\overrightarrow{OA} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = r\omega\vec{u}_\theta$$

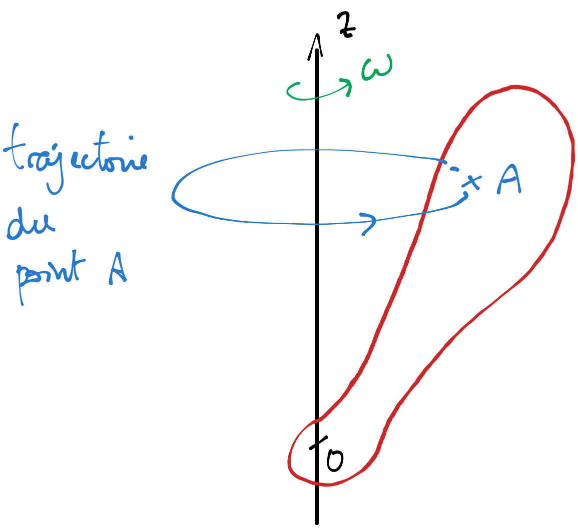
*Le point A a un **mouvement circulaire** de rayon r, de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ autour de (Oz).*

On introduit alors J_z moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz) (en kg.m^2). Le moment cinétique de Σ par rapport à (Oz) :

$$\boxed{L_z = J_z\omega}$$

L'énergie cinétique de Σ :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_z\omega^2}$$



$$J_z = \iiint_{P \in \Sigma} r_P^2 \, \rho(P) \, d\tau$$

masse volumique

distance entre le point P et l'axe de rotation.

II. Lois de Coulomb pour le frottement

Dans le programme on se limite au mouvement de translation d'un solide par rapport à un autre. On va aborder aussi rapidement le cas du roulement pour voir ce qui change.

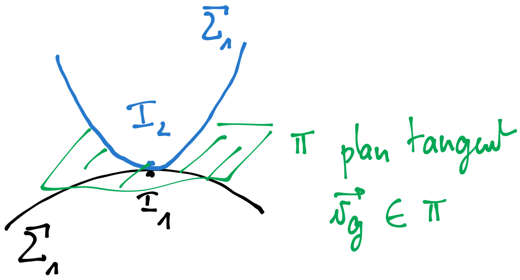
1. Mouvement relatif de deux solides en contact

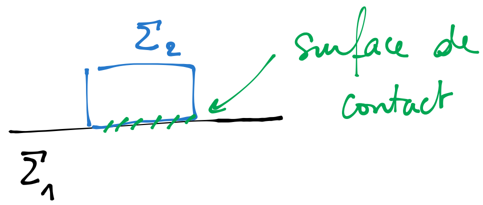
On considère deux solides Σ_1 et Σ_2 en contact.

— Dans le cadre du programme, les deux solides sont en contact sur une surface S. Deux cas sont alors possibles : les deux solides peuvent être immobiles (cas du **non glissement**) ; le solide Σ_2 peut **glisser** sur le solide Σ_1. On définit alors la **vitesse de glissement** de Σ_2 par rapport à Σ_1 :

$$\vec{v}_g = (\vec{v}(I_2 \in \Sigma_2))_{\Sigma_1}$$ $= \vec{v}_{I_2}/R - \vec{v}_{I_1}/R$ indépendante du référentiel R

— Dans le cas d'une roue sur le sol, le contact est quasi-ponctuel : à l'instant t les points $I_1 \in \Sigma_1$, $I_2 \in \Sigma_2$ et I coïncident. On distingue alors le roulement sans glissement ($\vec{v}_g = \vec{0}$) et le roulement avec glissement (la roue patine). *En écrivant $\vec{v}_g = \vec{0}$, on retrouve l'idée que lorsque la roue fait un tour elle avance de $2\pi R$.*





2. Lois de Coulomb du frottement de glissement

Au niveau microscopique, le contact entre les deux solides n'est pas ponctuel et met en jeu un grand nombre d'interactions (Van der Waals ...) entre les constituants des deux solides. Les **lois de Coulomb** sont des lois phénoménologiques qui décrivent la résultante à l'échelle macroscopique de ces actions.

On définit le plan Π tangent aux deux solides. On décompose l'action du solide Σ_1 sur le solide Σ_2 en deux composantes :

— $\vec{R}_N$ ou $\vec{N}$, composante **normale**, qui est orthogonale au plan Π, elle est dirigée de Σ_1 vers Σ_2. Le cas où $\vec{R}_N$ s'annule correspond à une perte de contact entre les deux solides.

— $\vec{R}_T$ ou $\vec{T}$, composante **tangentielle**, qui appartient au plan Π et qui correspond aux frottements. Elle est nulle dans le cas où le contact se fait sans frottement.

$$\vec{R}_{1\to 2} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$$

On passe de l'adhérence au glissement lorsque $\|\vec{R_T}\| = \mu_S \|\vec{R_N}\|$

On distingue alors deux cas :

— En l'absence de glissement :

$$\vec{v}_g = \vec{0}\ ;\ \|\vec{R}_T\| \leq \mu_S \|\vec{R}_N\|$$

μ_S est un coefficient sans dimension appelé **coefficient de frottement statique** (en effet dans le cas où les solides sont en translation l'un par rapport à l'autre, l'absence de glissement correspond au cas où Σ_2 ne bouge pas par rapport à Σ_1).

On passe du glissement à l'adhérence lorsque $\vec{v_g}$ s'annule

— Si Σ_2 glisse par rapport à Σ_1 avec la vitesse $\vec{v}_g$:

$$\|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$$

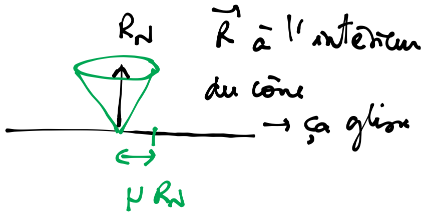
et $\vec{R}_T$ opposé à $\vec{v}_g$. Le coefficient μ_d est alors appelé **coefficient de frottement dynamique**.

Les coefficients de frottements statique et dynamique ont en général des valeurs proches et on les note μ. La valeur de μ dépend de la nature et de l'état des surfaces des solides en contact.

Ordres de grandeur : μ est de l'ordre de 0,1 pour un contact acier sur acier, de 0,3 pour un contact bois sur bois. Pour un pneu sur bitume sec il est de 0,6 et chute lorsque le sol est mouillé.

La limite $\mu \to 0$ correspond à l'absence de frottement : le mouvement se fait alors nécessairement avec glissement.

Le point d'application de $\vec{R}$ dans le cas d'un contact non ponctuel est un point I de la surface que l'on trouve en général grâce à des arguments de symétrie.



3. Aspects énergétiques

L'action de contact :

$$\vec{R}_{1\to 2} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$$

s'exerce au point de contact I qui est confondu avec le point I_2 lié au solide Σ_2. La puissance de $\vec{R}_{1\to 2}$ s'écrit :

$$\mathcal{P} = \vec{R}_{1\to 2}.\left(\vec{v}(I_2)\right)_{\Sigma_1}$$

$$\mathcal{P} = \vec{R}_{1\to 2}.\vec{v}_g$$

La vitesse de glissement est dans le plan tangent Π, seule la composante tangentielle $\vec{R}_N$ intervient :

$$\mathcal{P} = \vec{R}_N.\vec{v}_g$$

- $\mathcal{P}$ est nulle dans le cas d'un mouvement sans glissement car $\vec{v}_g = \vec{0}$.
- $\mathcal{P}$ est nulle en absence de frottement car $\vec{R}_N = \vec{0}$.
- $\mathcal{P}$ est négative sinon car $\vec{R}_N$ et $\vec{v}_g$ sont de sens opposés. La composante de frottement est dissipatrice d'énergie mécanique.

III. Applications

1. Détermination expérimentale d'un coefficient de frottement

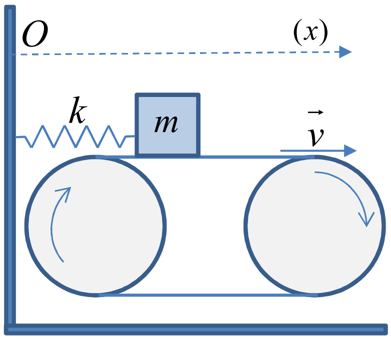
Voir TP.

2. Simulation : mouvement collé - glissé

exercice : Banque G2E 2022

5. L'OSCILLATEUR DE RELAXATION « STICK-SLIP » : UN MODELE SIMPLE EN GEOPHYSIQUE

Le coulissement entre deux plaques lithosphériques (faille *transformante*) peut être modélisé en première approximation par le dispositif suivant : un objet considéré comme *ponctuel*, de masse m, est posé sur un tapis roulant entraîné à une vitesse $\vec{v}$ constante (par rapport au sol, considéré comme « fixe »). Cet objet, qui est choisi comme « système », est également relié à un point fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k. La position du centre de l'objet est repérée par son abscisse x (axe horizontal). A l'instant $t=0$, le ressort n'est pas tendu (il n'exerce aucune force sur ses extrémités), et l'abscisse de la masse est notée x_0 (c'est la longueur à vide du ressort).



5.1. On constate que tant que l'intensité de la force de traction $\vec{T}$ exercée par le ressort ne dépasse pas une valeur T_{max}, l'objet reste « collé », c'est-à-dire fixe par rapport au tapis. Exprimer alors la loi horaire $x(t)$ durant cette phase. Ecrire une relation simple entre la force de frottement $\vec{F}$ exercée par le tapis sur l'objet et la force $\vec{T}$ exercée par le ressort. Justifier. En déduire la norme $F(t)$ de la force exercée par le tapis sur l'objet.

Par contre dès que $\|\vec{T}\|$ atteint la valeur T_{max}, l'objet « se décolle » et on considère qu'il glisse sans frottement sur le tapis : $\vec{F}$ s'annule, et l'objet n'est plus soumis qu'à l'action du ressort.

5.2. A quel instant t_1 (à exprimer en fonction de T_{max}, k et v) l'objet décolle-t-il du tapis ? A quelle équation différentielle obéit la position $x(t)$ de cet objet dans la phase qui suit ?

5.3. Justifier que l'on peut écrire la solution de cette équation différentielle sous la forme $x(t)=x_0+A\sin\left[\omega_0\left(t-t_1\right)+\alpha\right]$, où A, ω_0 et α sont des constantes. Exprimer ω_0 en fonction de k et de m. En tenant compte des conditions initiales, exprimer $\tan\alpha$ en fonction de ω_0 et t_1, et A en fonction de v, t_1 et ω_0.

5.4. Lorsque la vitesse de la masse par rapport au tapis s'annule à nouveau, la force de frottement $\vec{F}$ réapparaît. A quel instant t_2 cela se produit-il ? (exprimer t_2 en fonction de t_1, α et ω_0). Vérifier qu'à cet instant, la longueur du ressort vaut $x(t_2)=x_0-A\sin\alpha$.

5.5. La masse est alors de nouveau entraînée par le tapis à vitesse constante v. A quel instant t_3 décolle-t-elle à nouveau ? Représenter graphiquement l'allure du mouvement périodique de la masse $x(t)$. Exprimer sa période T en fonction de ω_0, α, A et v.