Électromagnétisme
Chapitre 1 - Électrostatique

Rappels de première année :

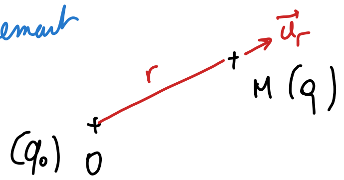
— Charge ponctuelle :

* Electron de charge $-e$, ion | cation $+ne$ ex Cu^{2+} | anion $-ne$ ex Cl^-

* Surface chargée → on arrache des charges en frottant la surface

— Force de Coulomb :

introduite expérimentalement en 1784



force sur M

$$\boxed{\vec{F} = \frac{q_0\, q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r}$$

$q_0 q > 0$ répulsive

$q_0 q < 0$ attractive

$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ F.m^{-1}$ permittivité du vide

— Force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

vitesse de la particule

force subie par une charge ponctuelle q dans une zone où règnent $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Dans le cadre de l'électrostatique, les charges sont fixes.

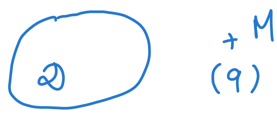
I. Loi de Coulomb

idée : dans le cas de la gravitation on peut penser que M est soumis à son poids ou que M évolue dans le champ de pesanteur créé par la Terre

1. Champ électrostatique $\vec{E}$

On considère une distribution de charges $\mathcal{D}$. On définit le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par $\mathcal{D}$ en un point M de l'espace par son action sur une charge ponctuelle q placée en M :

$$\vec{F} = q\,\vec{E}(M)$$



Exemple : soit une charge ponctuelle q_o placée en O

La force subie par q en M : $\vec{F} = \dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

Le champ électrostatique créé par la charge ponctuelle q_o placée au point O s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o\, r^2}\vec{u}_r}$$

Commentaires :

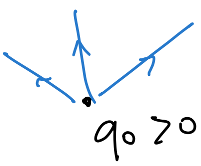
— Ordre de grandeur du champ atomique :

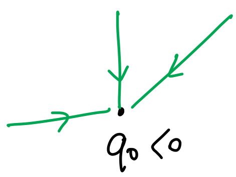
$$E_{at} \sim \frac{10^{-19}}{10 \,.\, 10^{-11} \,.\, (10^{-10})^2} \sim 10^{11}\ V/m$$

l'unité de E sera justifiée plus loin

— Lignes de champ :

$\vec{E}$ diverge à partir des charges positives



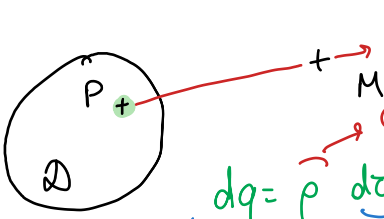


$\vec{E}$ converge vers les charges négatives

Théorème de superposition (linéarité des équations en électromagnétisme)

champ créé par un ensemble de charges $\{q_i\}$ $\left(\vec{E}(M) = \Sigma\vec{E}_i(M)\right.$ champ créé par la charge q_i

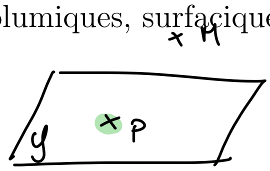
Conséquence : cas des distributions volumiques, surfaciques et linéïques.



$\underbrace{dq}_{C} = \overbrace{\rho}^{C.m^{-3}} \underbrace{d\tau}_{m^3}$

ρ = densité volumique de charges

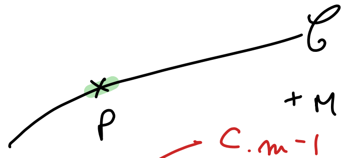
$$\boxed{\vec{E}(M) = \iiint_{P\in\mathcal{D}} \frac{\rho(P)\,d\tau}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{u}_{PM}}$$



$\underbrace{dq}_{C} = \overbrace{\sigma}^{C.m^{-2}} \underbrace{dS}_{m^2}$

σ = densité surfacique

$$\vec{E}(M) = \iint_{P\in\mathcal{S}} \frac{\sigma(P)\,dS}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{u}_{PM}$$



$\underbrace{dq}_{C} = \overbrace{\lambda}^{C.m^{-1}} \underbrace{dl}_{m}$

λ = densité linéique

$$\vec{E}(M) = \int_{P\in\mathcal{C}} \frac{\lambda(P)\,dl}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{u}_{PM}$$

Rq : la charge totale dans $\mathcal{D}$ s'écrit $Q = \iiint_{P\in\mathcal{D}} \rho(P)\,d\tau$

2. Potentiel électrostatique

D'un point de vue mécanique : : cas d'une particule M de charge q dans le champ $\vec{E}$ créé par la charge q_o en O :

$$\vec{F} = \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon_o\, r^2}\vec{u}_r$$

Soit :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

$\overrightarrow{\text{grad}}\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$ en coord. cartésiennes

avec

$$E_p = \frac{qq_o}{4\pi\varepsilon_o\, r}$$

On écrit $E_p = qV(M)$ avec $V(M)$ potentiel électrostatique créé par la charge q_o en M :

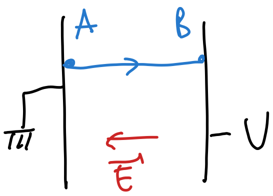
$$\boxed{V(M) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Plus généralement la force électrostatique subie par la charge q dans le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par la distribution $\mathcal{D}$ est conservative et l'énergie potentielle associée :

$$\underbrace{E_p}_{J} = \overbrace{q}^{C}\underbrace{V(M)}_{V}$$

$1\,J = 1\,C.V$

Application : déterminer la vitesse d'un électron accéléré par une différence de potentiel U.



En A : $E_m(A) = 0 + 0$ (vitesse nulle, potentiel nul)

En B : $E_m(B) = \frac{1}{2}mv^2 - eU$

Conservation de l'énergie mécanique : $E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$

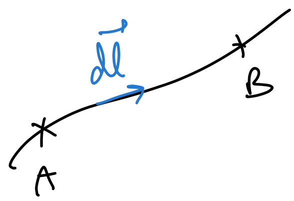
D'un point de vue électrostatique :

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}V \cdot \vec{d\ell} = dV$
variation de V lors d'un petit déplacement $\vec{d\ell}$

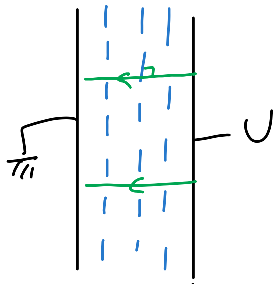
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$$

$$\vec{E}.d\vec{\ell} = -dV$$

$$\underbrace{\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell}}_{\text{circulation de } \vec{E} \text{ entre A et B}} = \underbrace{V_A - V_B}_{\text{tension } U_{AB}}$$

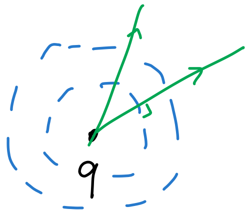


On associe au potentiel électrostatique $V(M)$ des surfaces appelées **surfaces équipotentielles**. Les lignes de champ du champ électrostatique $\vec{E}$ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et dirigées dans le sens des potentiels décroissants.



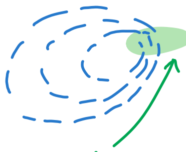
Condensateur

-- équipotentielle (surface $V = cte$)



exercice

Mq $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$



équipotentielles serrées

$\Rightarrow E$ intense

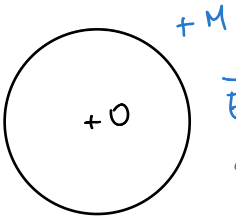
$E \cdot AB = V_{AB}$

$\Rightarrow E \nearrow$ si $AB \searrow$

II. Propriétés du champ électrostatique

1. Propriétés d'invariance et de symétrie

Invariances : exemples de la sphère, du cylindre et du plan infini.

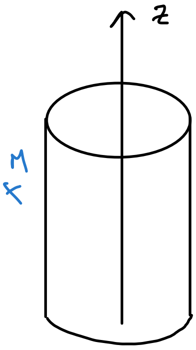


$\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_r}$ sphériques

$\mathcal{D}$ = boule de centre O uniformément chargée

* $\mathcal{D}$ est invariante par toute rotation de centre O

$E(M) = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})$

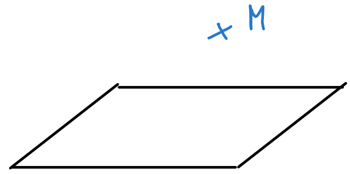


$\mathcal{D}$ = cylindre infini d'axe (Oz) uniformément chargé

$\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_r}$ cylindriques

* $\mathcal{D}$ est invariante par rotation autour de (Oz) et par translation suivant $\vec{u_z}$

$E(M) = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$



$\mathcal{D}$ = plan infini (Oxy) uniformément chargé

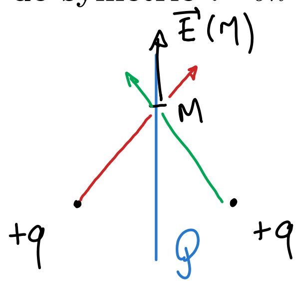
$\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_z}$ cartésiennes

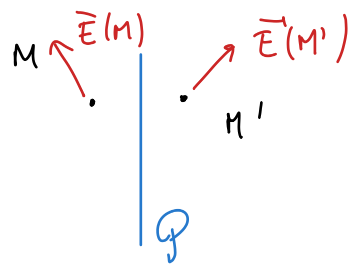
* $\mathcal{D}$ est invariante par translation suivant $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$:

$E(M) = E(\cancel{x}, \cancel{y}, z)$

Principe de Curie : les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets.

Plans de symétrie : *on considère tout d'abord le cas de deux charges ponctuelles identiques* $+q, +q$

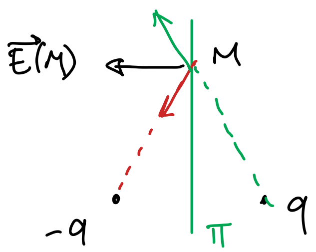


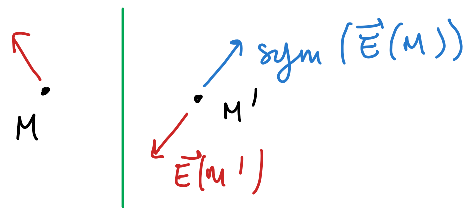


Soit $\mathcal{P}$ un plan de symétrie de la distribution de charges :

- Si $M \in \mathcal{P}$ alors $\vec{E}(M) \in \mathcal{P}$
- Si $M' = \text{sym}_{\mathcal{P}}(M)$ alors $\vec{E}(M') = \text{sym}_{\mathcal{P}}(\vec{E}(M))$

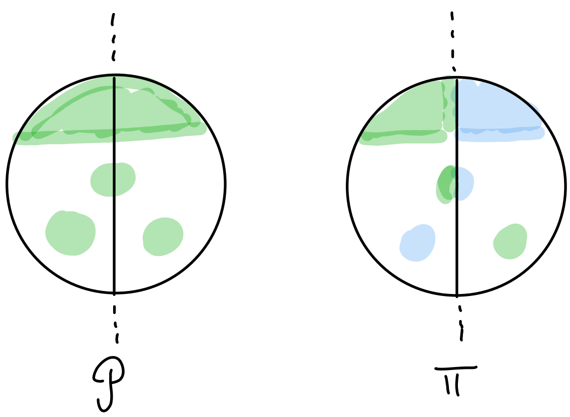
Plans d'antisymétrie : *on considère tout d'abord le cas de deux charges ponctuelles opposées* $+q, -q$





Soit Π un plan d'antisymétrie de la distribution de charges :

* Si $M \in \Pi$ alors $\vec{E}(M) \perp \Pi$
* Si $M' = \text{sym}_{\Pi}(M)$ alors $\vec{E}(M') = -\text{sym}_{\Pi}(\vec{E}(M))$

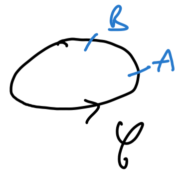


→ pour que $\mathcal{D}$ présente un plan d'antisymétrie il faut que $\mathcal{D}$ comporte des charges + et –

Rq : on dit que $\vec{E}$ est un vrai vecteur ou vecteur polaire

2. Circulation du champ électrostatique $\vec{E}$

Soit $\mathcal{C}$ un contour fermé orienté :



$$\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell} = V_A - V_B$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \vec{E}.d\vec{\ell} = 0 \quad \text{(loi des mailles)}$$

Le champ électro**statique** $\vec{E}$ est à circulation conservative.
Théorème de Stokes :

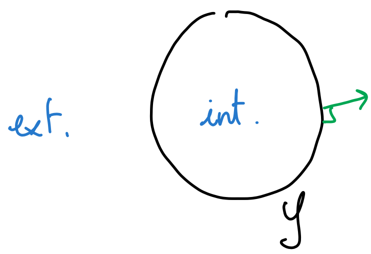
$$\underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}.d\vec{\ell}}_{\text{circulation de } \vec{E} \text{ sur } \mathcal{C} \text{ contour fermé}} = \underbrace{\iint_{\mathcal{S}} (\vec{rot}\,\vec{E}).d\vec{S}}_{\text{flux du rotationnel de } \vec{E} \text{ à travers } \mathcal{S}}$$

Théo de Stokes

Conséquence : $\boxed{\vec{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \quad \text{équation de Maxwell - Faraday}}$

3. Flux du champ électrostatique $\vec{E}$

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée : = délimite un intérieur et un extérieur



$d\vec{S}$ orienté de l'intérieur vers l'extérieur

$$\boxed{\underbrace{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}.d\vec{S}}_{\text{flux de } \vec{E} \text{ à travers } \mathcal{S}} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}} \quad \text{Théorème de Gauss}$$

Q_{int} : charge à l'intérieur

Remarque : déterminer la dimension de ε_o (permittivité du vide) à partir du théorème de Gauss.
Théorème de Green-Ostrogradski

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div}\,\vec{E}\, d\tau}$$

$\text{div}\,\vec{E}$ = divergence de $\vec{E}$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{D}} \text{div}\,\vec{E}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_o} \iiint_{\mathcal{D}} \rho\, d\tau \Rightarrow \iiint_{\mathcal{D}} \left(\text{div}\,\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_o}\right) d\tau = 0 \quad \text{quel que soit } \mathcal{D}$$

soit $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o}$

> En statique, le champ $\vec{E}$ et le potentiel V sont solutions des équations locales :
>
> ρ = densité volumique de charge ($C.m^{-3}$)
>
> $$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad \text{équation de Maxwell Gauss}$$
>
> $$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0} \quad \text{équation de Maxwell Faraday}$$
>
> $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow \text{div}\,\vec{E} = \text{div}(\overrightarrow{grad}\,V) = \Delta V$ laplacien de V
>
> $$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad \text{équation de Poisson}$$

Rq : si $\rho = 0$ $\Delta V = 0$ équation de Laplace

III. Étude topographique

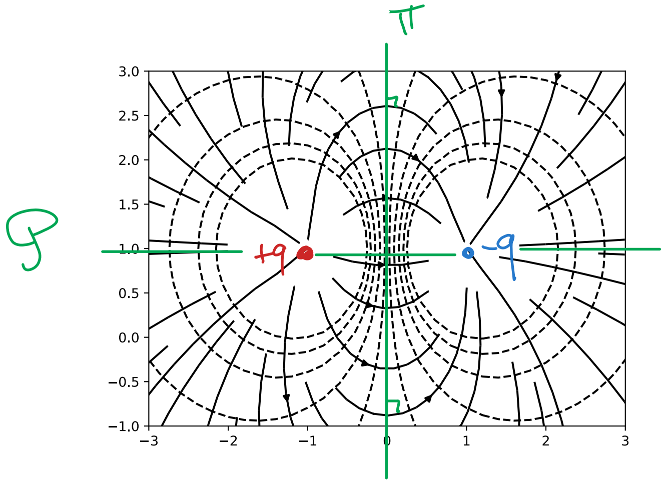
1. Relevé expérimental de surfaces équipotentielles

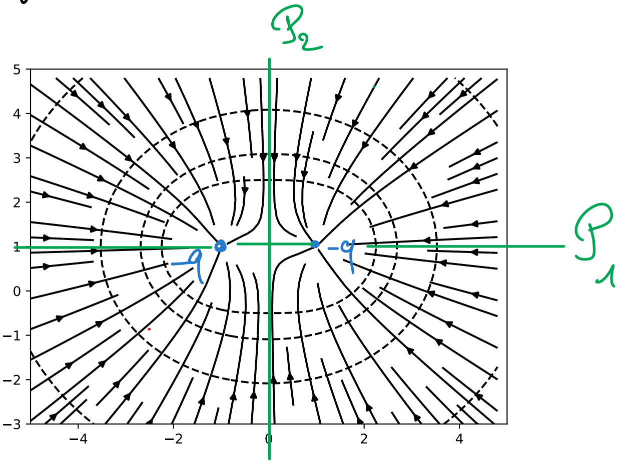
Expérience : condensateur plan.

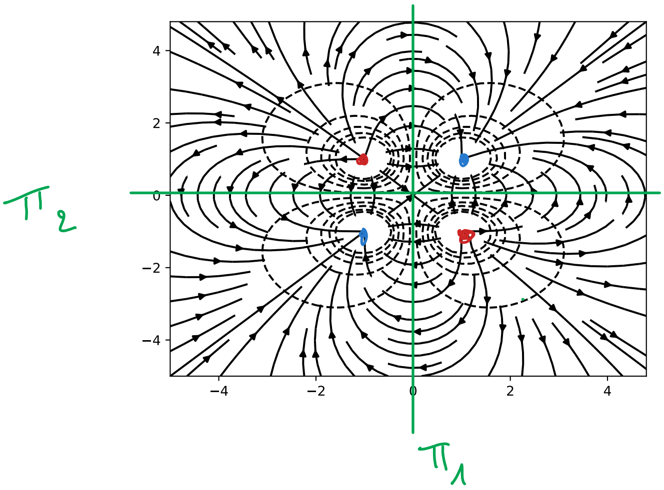
⇒ *Estimer la norme du champ E à partir du relevé expérimental*

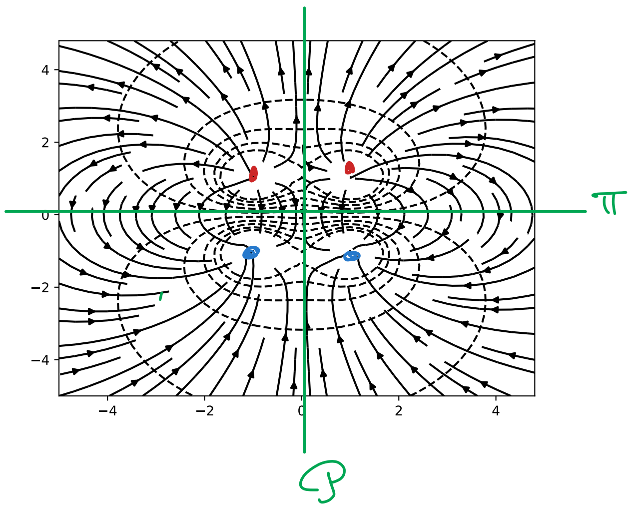
2. Analyse de cartes de champ

- - - = surface équipotentielle
— = ligne de champ



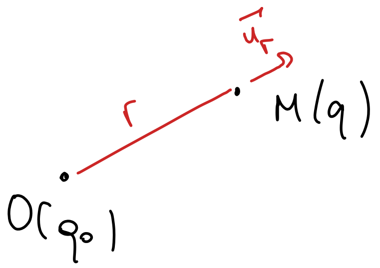


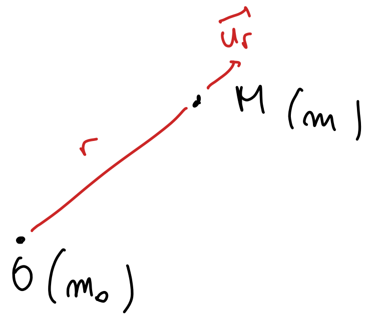




Analogie avec le champ de gravitation :

On observe une similitude entre la force de Coulomb et la force de gravitation





$$\vec{F} = \frac{q_0 \, q}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \vec{u_r} \qquad\qquad \vec{F} = -G \frac{m_0 \, m}{r^2} \vec{u_r}$$

On construit l'analogie :

$$q \longleftrightarrow m$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \longleftrightarrow -G$$

$$\vec{E} \longleftrightarrow \vec{\mathcal{G}} \text{ champ de gravitation}$$

On peut alors utiliser un analogue du théorème de Gauss :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \longleftrightarrow \oiint_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{dS} = -4\pi G \, M_{int}$$

L'étude des invariances et symétrie de $\vec{\mathcal{G}}$ est identique à celle de $\vec{E}$