

Électromagnétisme - TD0 - Analyse vectorielle

Exercice 1 - Opérateur gradient

En mécanique, on a défini une force conservative comme une force dont le travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi :

$$W_{AB}(\vec{F}) = -(E_p(B) - E_p(A))$$

E_p désignant l'énergie potentielle. L'opérateur **gradient** permet de relier le champ de vecteurs $\vec{F}$ à la fonction $E_p(M)$:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

1. En utilisant le formulaire, montrer que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \Rightarrow W_{AB}(\vec{F}) = -(E_p(B) - E_p(A))$$

2. On se place en coordonnées cartésiennes, l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur à l'aide de la relation :

$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

3. En utilisant les coordonnées sphériques, déterminer l'énergie potentielle associée à la force électrostatique exercée par une charge q_o placée en O sur une charge q placée en M :

$$\vec{F} = \frac{q_o q}{4\pi\epsilon_o r^2} \vec{u}_r$$

4. En coordonnées cylindriques : la force d'inertie d'entraînement est-elle conservative ?

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r \vec{u}_r$$

Formulaire :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) \cdot d\vec{OM} = dU$$

— En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

— En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

— En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Exercice 2 - Exemples de calculs de flux

Soit $\vec{A}$ un champ de vecteurs, le **flux** de $\vec{A}$ à travers une surface $\mathcal{S}$:

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

1. En mécanique des fluides, le flux du vecteur vitesse représente le débit volumique de fluide à travers la section $\mathcal{S}$

$$D_v = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{v}(P) \cdot d\vec{S}$$

Déterminer le débit volumique dans une artère cylindrique de rayon R dans laquelle le sang s'écoule avec un profil parabolique (en coordonnées cylindriques) :

$$\vec{v} = v_o \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{u}_z$$

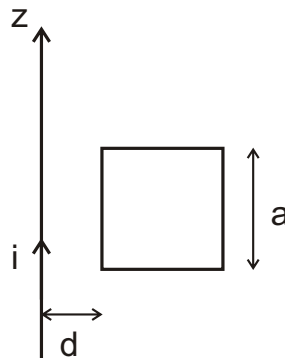
2. En induction, le calcul du flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers un circuit permet de déterminer la force électromotrice induite dans le circuit :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

On considère un fil rectiligne confondu avec l'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité i . Ce fil crée en un point M de l'espace le champ magnétique $\vec{B}$ qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- (a) Représenter l'allure des lignes de champ de $\vec{B}$.
- (b) Déterminer le flux de $\vec{B}$ à travers un cadre carré de côté a placé à une distance d du fil.



Exercice 3 - Circulation

Soit $\vec{A}$ un champ de vecteurs, la **circulation** de $\vec{A}$ le long d'un contour $\mathcal{C}$:

$$C = \int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Déterminer la circulation du champ magnétique créé par un fil confondu avec l'axe (Oz) , parcouru par un courant d'intensité i (voir exercice précédent) le long d'un cercle d'axe (Oz) et de rayon R .