Électromagnétisme - TD1 -Électrostatique

Exercice 1 - Théorème de Gauss

1. On considère un cylindre infini, d'axe (Oz) de rayon R uniformément chargé en volume avec une densité volumique ρ_o.
   (a) Quelle est l'unité de ρ_o ?
   (b) Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.
2. On considère cette fois que la densité volumique dans le cylindre s'écrit :

$$\rho(r) = \rho_o \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right)$$

   (a) La grandeur ρ_o a-t-elle toujours la même dimension ?
   (b) Prévoir qualitativement l'évolution du champ électrique à l'extérieur du cylindre par rapport au cas précédent ?
   (c) Déterminer $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.

Exercice 2 - Champ de gravitation terrestre

La Terre est assimilée à une sphère de centre O, de rayon $R_T = 6.10^3$km, de masse $M_T = 6.10^{24}$kg. L'étude des ondes sismiques montre que l'on peut modéliser le champ gravitationnel à l'intérieur de la Terre comme indiqué sur le schéma ci-dessous[1] avec $R_1 = 3,50.10^3$km.
Quelle doit être la répartition de la masse volumique $\rho(r)$ à l'intérieur de la Terre pour que le champ de gravitation corresponde à ce profil ?

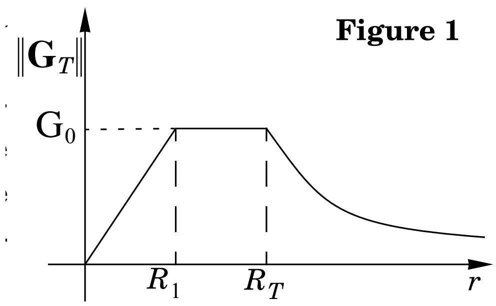


Figure 1

Exercice 3 - Potentiel de Yukawa

Le physicien japonais Yukawa (Prix Nobel 1949) a postulé la forme de potentiel suivante pour traduire les interactions entre particules dans le noyau atomique :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

q et a étant des constantes positives.

1. Déterminer les unités de q et a.
2. Déterminer le champ électrostatique correspondant.

1. D'après Centrale MP 2008.

Exercice 4 - Distribution surfacique / distribution volumique

1. On considère un plan infini d'équation $z = 0$ portant la densité surfacique de charge σ_o positive et uniforme. Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace. Que se passe-t-il au niveau du plan $z = 0$?
2. On considère désormais que cette distribution a une certaine épaisseur e et qu'elle est chargée en volume avec une densité volumique ρ_o uniforme.
   (a) Quel doit être le lien entre σ_o et ρ_o pour que les deux distributions soient équivalentes ?
   (b) Déterminer le champ électrique en tout point dans le cas de la distribution volumique.

Exercice 5 - Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres de même axe (Oz), de rayons a et $b > a$ séparés par un diélectrique de permittivité ε (*On remplace alors la permittivité du vide ε_o par ε dans le théorème de Gauss.*). Le cylindre intérieur porte une densité surfacique de charge positive $+\sigma_o$, le cylindre extérieur porte une densité surfacique de charge négative :

$$\sigma_1 = -\sigma_o \frac{a}{b}$$

1. On considère une portion de longueur ℓ de câble. Donner les expressions des charges en regard portées par les deux cylindres.
2. Donner l'expression du champ entre les deux cylindres en fonction de Q_ℓ charge d'une longueur ℓ du cylindre de rayon a. Que vaut la différence de potentiel U entre les deux conducteurs ?
3. En déduire l'expression de la capacité C_ℓ d'une portion de longueur ℓ de câble. Pour quelle valeur de ℓ faut-il tenir compte de la capacité du câble en TP. Commenter.

On donne les dimensions du câble $a = 1\text{mm}$; $b = 3,5$ mm ainsi que la permittivité dans le milieu $\varepsilon = 2.10^{-11}\text{F.m}^{-1}$

Exercice 6 - Champ au voisinage de la Terre

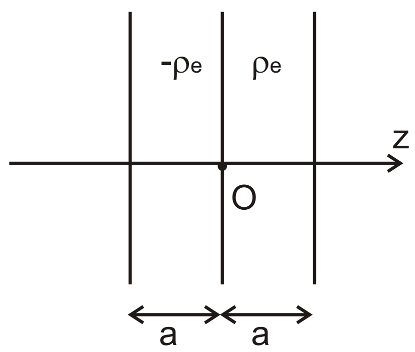
On observe à la surface de la terre, par temps clair, un champ électrostatique vertical descendant de l'ordre de 100V.m^{-1} et on a mis en évidence l'existence d'une couche conductrice de l'atmosphère (appelée ionosphère) à partir d'une altitude $h \simeq 70\text{km}$. Cela conduit à modéliser de façon simplifiée l'état électrique de l'atmosphère par un condensateur sphérique dont la surface de la Terre et la base de l'ionosphère sont les armatures. On note Q (respectivement -Q) la charge portée par la bas de l'ionosphère (respectivement par la surface de la terre).

1. Déterminer le champ électrique régnant en tout point de l'espace compris entre les armatures. En déduire la valeur de Q et de la densité surfacique de charge σ au niveau de la surface de la terre.
2. Calculer le potentiel dans la même région. En déduire la différence de potentiel entre la surface de la terre et la base de l'ionosphère. Quelle est la capacité du condensateur ainsi formé ?
3. On cherche à montrer que, pour un potentiel donné, le champ à proximité de la surface est d'autant plus intense que la surface est pointue. Ce phénomène s'appelle "pouvoir des pointes", il explique notamment pourquoi la foudre tombe préférentiellement sur des objets pointus.
   (a) On considère une sphère conductrice de centre O de rayon R portant la densité surfacique de charge uniforme σ. Exprimer le champ électrostatique créé par cette distribution en un point M à l'extérieur de la sphère.
   (b) En déduire l'expression du potentiel $V(r)$ pour $r \geq R$ en prenant un potentiel nul à l'infini.
   (c) En déduire une relation entre le champ et le potentiel en $r = R$. Conclure.

Exercice 7 - Jonction électrostatique

On réalise une jonction en accolant deux matériaux qui portent des charges électriques opposées. On assimile ces matériaux à des galettes infinies, d'épaisseur $a = 1\mu$m, délimitées par des plans parallèles et portant chacune des charges volumiques uniformes ρ_e et $-\rho_e$.

1. Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques créés par cette distribution en tout point de l'espace en fonction de $V(a)$ et $V(-a)$.
2. En déduire une relation entre les potentiels $V(a)$ et $V(-a)$.
3. Calculer ρ_e pour une différence de potentiel $U_d = V(a) - V(-a)$ de 0,8 V entre les galettes.



Exercice 8 - Moment dipolaire d'une molécule

La molécule d'eau H_2O est une molécule polaire coudée d'un angle de 105° dans laquelle la distance entre l'oxygène central et un des atomes d'hydrogène est de 95 pm.

1. Représenter la molécule d'eau (faire un schéma de Lewis si possible). Proposer une explication à sa géométrie.
2. Estimer la distance PN du dipôle en utilisant les données géométriques.
3. Le moment dipolaire de la molécule est de 1,85 D (1D=3,3.10^{-30}C.m). Estimer la charge -q portée par l'atome d'oxygène. Commenter.
4. Lorsqu'on approche une baguette en plastique préalablement chargée, on observe une déviation du filet. Proposer une explication.
5. La molécule de dioxyde de carbone CO_2 ne possède pas de moment dipolaire permanent. Que peut-on en déduire de sa géométrie ?

Exercice 9 - Action d'un champ extérieur sur un dipôle [2]

Une molécule est placée dans le champ électromagnétique d'une onde plane progressive monochromatique. Si sa longueur d'onde est beaucoup plus grande que la molécule, montrer que la résultante de la force exercée par le champ électrique sur l'ensemble de la molécule (électrons et noyaux) est, à tout instant, proportionnelle à la projection de son moment dipolaire sur le vecteur d'onde. On pourra prendre l'exemple d'une onde plane polarisée linéairement, développer la variation spatiale du champ électrique au premier ordre au voisinage d'un point quelconque de la molécule, choisi pour origine du système de coordonnées, et justifier ce développement.

2. D'après X-ENS MPI 2023