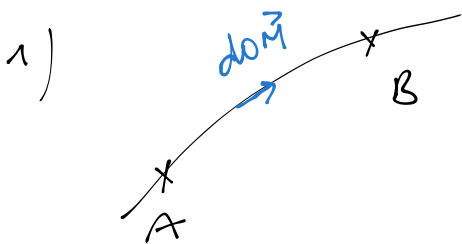


Electromagnétisme - TD0 - Analyse vectorielle

EXERCICE 1



Le travail élémentaire de $\vec{F}$ le long du déplacement $d\vec{OM}$:

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

$$\Leftrightarrow \delta W(\vec{F}) = -(\vec{\text{grad}} E_p) \cdot d\vec{OM}$$

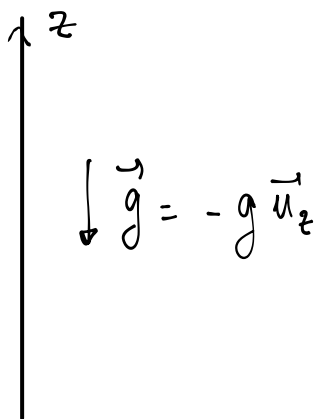
Soit en utilisant le formulaire : $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$

On intègre le long d'un chemin allant de A à B :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} \Leftrightarrow W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B -dE_p$$

$$\Leftrightarrow W_{AB}(\vec{F}) = - \left(E_p(B) - E_p(A) \right)$$

2)



Soit M un point matériel M de masse m :

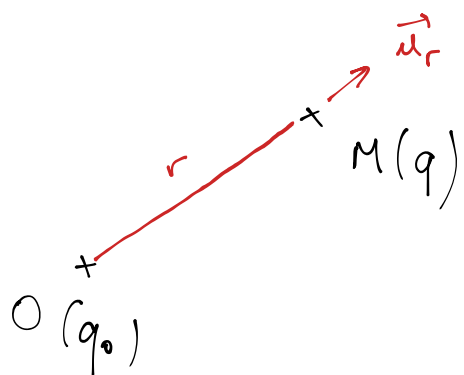
$$\vec{P} = -m g \vec{u}_z$$

$$\vec{P} = -\vec{\text{grad}} E_p \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -m g \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L' énergie potentielle de pesanteur ne dépend que de z et $\frac{dE_p}{dz} = mg$

Soit $E_p = m g z + E_{p0}$ (E_{p0} = constante d' intégration).

3)



$$\vec{F} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{force exercée}$$

par la charge q_0 en O sur la charge q en M.

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial r} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$$

E_p ne dépend ni de θ
ni de φ

E_p n'est une fonction que de r et $\frac{dE_p}{dr} = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\Rightarrow E_p(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r} + E_{p0}$$

on choisit en général $E_{p0} = 0$

de façon à avoir $E_p(r) \rightarrow 0$
 $r \rightarrow \infty$

4) On cherche E_p telle que $\vec{f}_{ie} = -\vec{\text{grad}} E_p$

$$-\frac{\partial E_p}{\partial r} = m \omega^2 r$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

E_p ne dépend ni de θ ni de z

E_p est une fonction de r et $\frac{dE_p}{dr} = -m \omega^2 r$

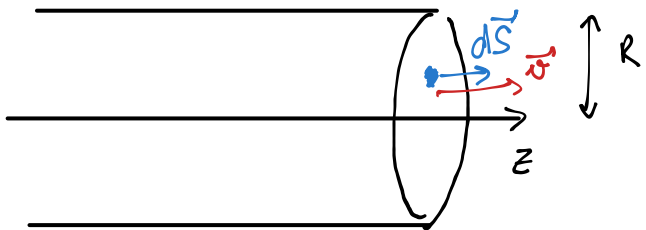
On intègre :

$$E_p(r) = -m \omega^2 \frac{r^2}{2} + E_{p0}$$

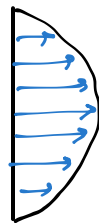
$\Rightarrow \vec{f}_{ie}$ est bien
conservative

EXERCICE 2

1)



Profil de vitesse :



$d\vec{S} = dr \, r d\theta \, \vec{u}_z$ élément de surface

$$\mathcal{D}_v = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r \, dr \, d\theta$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_v = 2\pi v_0 \int_{r=0}^R \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) dr$$

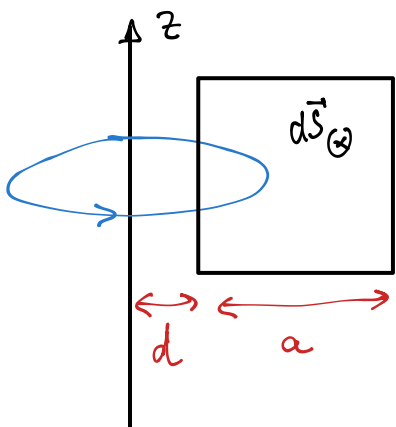
$$= 2\pi v_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} \right)$$

$\frac{R^2}{4}$

Finalement

$$\mathcal{D}_v = \pi R^2 \frac{v_0}{2}$$

2)



a) Les lignes de champ sont des cercles
 $\perp$ axe (Oz)

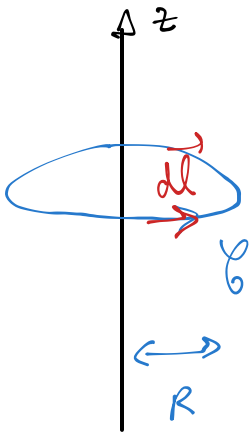
b) $d\vec{S} = dr \, dz \, \vec{u}_\theta$ surface élémentaire

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr \, dz$$

$$\phi = \int_{z=0}^a \int_{r=d}^{d+a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr \, dz$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln \left(\frac{d+a}{d} \right)$$

Exercice 3



$d\vec{l} = R d\theta \vec{u}_\theta$ déplacement élémentaire

$$\vec{B}. d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} R d\theta$$

$\leftarrow r = R \sin \theta$

$$C = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\theta$$

Soit

$$C = \mu_0 i$$