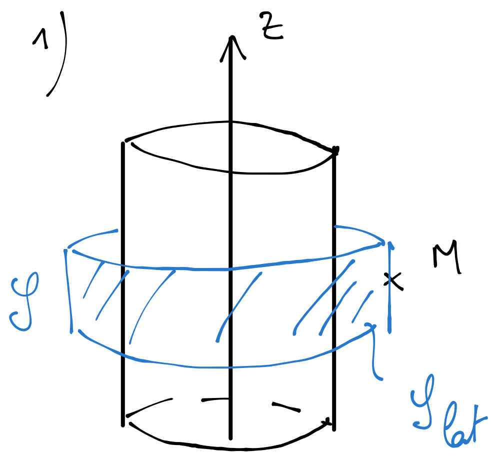
Electromagnétisme – TD1 – ELECTROSTATIQUE

EXERCICE 1

1)



a) $\rho_0 = \dfrac{\text{charge}}{\text{volume}} \Rightarrow \rho_0$ s'exprime en $C.m^{-3}$

b) Symétrie : Les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M\ \vec{u_r}, \vec{u_z})$ sont des plans de symétrie de la distribution

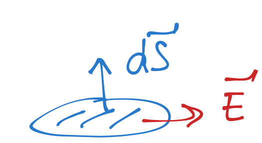
$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\ \vec{u_r}$$

Invariances : la distribution est invariante par rotation autour de (Oz) et par translation d'axe (Oz) $\Rightarrow E(r, \theta, z) = E(r)$

Finalement $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\ \vec{u_r}}$

Surface de Gauss : S = cylindre d'axe (Oz) passant par M (hauteur h, rayon r)

$$\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \iint_{S_{lat}} E(r)\ dS$$



$\vec{E}.\vec{dS} = 0$ sur les bases du cylindre

$$= 2\pi r h\ E(r)$$

$$\boxed{\text{Théorème de Gauss : } \oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

1er cas : $r \leqslant R$ $\quad Q_{int} = \rho_0 \pi r^2 h \Rightarrow E(r) = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r$

2e cas $r \geqslant R$ $\quad Q_{int} = \rho_0 \pi R^2 h \Rightarrow E(r) = \rho_0 \dfrac{R^2}{2r\varepsilon_0}$

(On vérifie la continuité du champ en $r = R$).

2) a) $\underbrace{\rho(r)}_{C.m^{-3}} = \rho_0 \underbrace{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right)}_{\text{sans dimension}}$ $\rightarrow$ ρ_0 est également en $C.m^{-3}$

b) $\rho(r) \leqslant \rho_0$ $\Rightarrow$ Q_{int} diminue par rapport au cas précédent
$\Rightarrow$ le champ E est moins intense

c) Il suffit de déterminer Q_{int} :

$\underline{r \geqslant R}$

$$Q_{int} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right) r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= h\, 2\pi\, \rho_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^5}{5R^3}\right]_0^R$$

$$= h\, 2\pi\, \rho_0\, \frac{3}{10} R^2$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{3}{10} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{r}$$

$\underline{r \leqslant R}$:

$$Q_{int} = h\, 2\pi\, \rho_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^5}{5R^3}\right)$$

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{2} - \frac{r^4}{5R^3}\right)$$

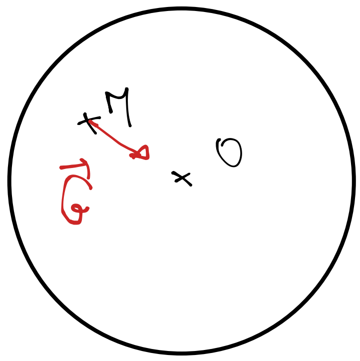
<u>EXERCICE 2</u>

On va utiliser l'analogie entre le champ électrostatique et le champ de gravitation :

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{G}$$

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u_r} \qquad q \longleftrightarrow m \qquad \vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u_r}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow -4\pi\mathcal{G}$$



Symétrie – Invariances : $\vec{G}(M) = G(r)\,\vec{u}_r$

Equation de Maxwell – Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ densité volumique de charge

Relation analogue : $\operatorname{div} \vec{G} = -4\pi \mathcal{G} \underbrace{\rho}_{\text{masse volumique}}$

Formulaire : pour $\vec{G} = G(r)\,\vec{u}_r$:

$$\operatorname{div} \vec{G} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 G(r)\right)$$

$r < R_1$: $G(r) = -G_0 \dfrac{r}{R_1} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{G} = -\dfrac{3G_0}{R_1}$

voir orientation sur le schéma

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{G} = -\dfrac{3G_0}{R_1} \\ \operatorname{div} \vec{G} = -4\pi \mathcal{G} \rho_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = \frac{3G_0}{4\pi \mathcal{G} R_1}}$$

$R_1 < r < R_2$ $G(r) = -G_0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{G} = -\dfrac{2G_0}{r}$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_2 = \frac{G_0}{2\pi \mathcal{G} r}}$$

La discontinuité de ρ correspond à l'interface noyau / manteau.

EXERCICE 3

1) $$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\exp\left(\underbrace{-\frac{r}{a}}\right)$$

$\frac{r}{a}$ doit être sans dimension

$\longrightarrow$ a est une longueur

L'exponentielle est sans dimension.

Le potentiel créé par une charge ponctuelle est $V(M) = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon r}$

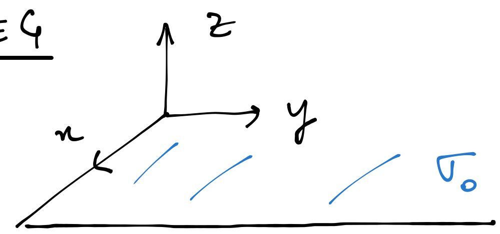
$\Rightarrow$ q est donc une charge.

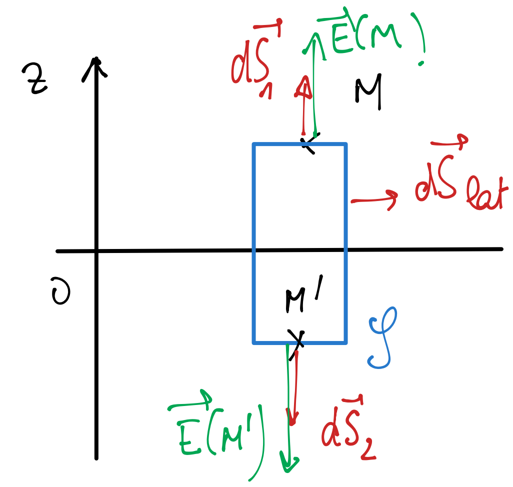
2) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V \iff \vec{E} = -\dfrac{dV}{dr}\,\vec{u}_r$ car V ne dépend ni de θ ni de φ.

On a donc : $$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, e^{-r/a}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ra}\right)\vec{u}_r}$$

EXERCICE 4

1)





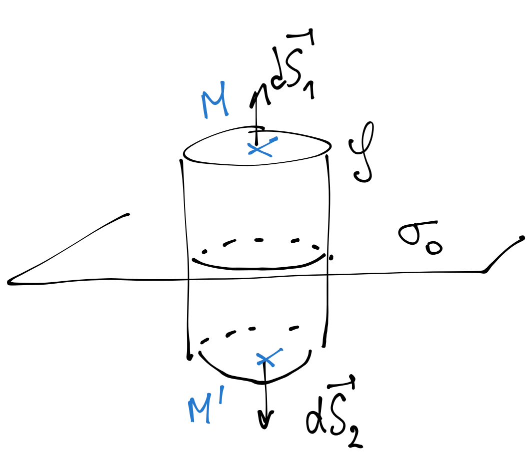
Symétries : Tous les plans contenant la droite $(M, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\,\vec{u}_z$

Le plan (Oxy) est un plan de symétrie de la distribution. Soit M' le symétrique de M par rapport à (Oxy) :

$$\vec{E}(M') = \text{symétrique}\left(\vec{E}(M)\right)$$
$$= -\vec{E}(M)$$

Invariances : la distribution est invariante par translation suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ $\Rightarrow E(x, y, z) = E(z)$

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(z)\,\vec{u}_z$

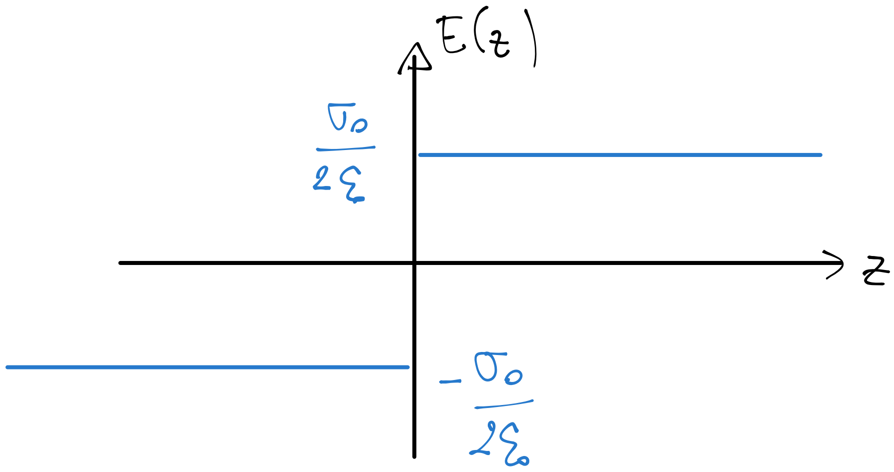


S : surface de Gauss = cylindre d'axe $(M, \vec{u}_z)$ de bases passant par M et M' son symétrique (surface S)

Théorème de Gauss : $\oiint_{S} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

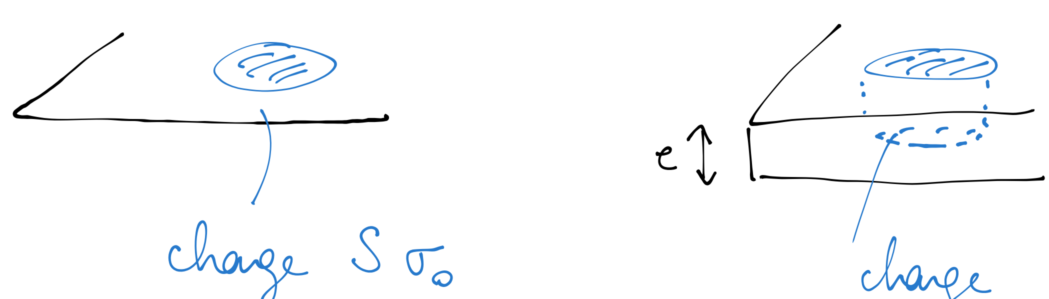
$$\underbrace{\iint_{base\ 1} \vec{E}\cdot d\vec{S}_1}_{E(M)\,S} + \underbrace{\iint_{base\ 2} \vec{E}\cdot d\vec{S}_2}_{E(M)\,S \ \text{(par symétrie)}} + \underbrace{\iint_{surface\ latérale} \vec{E}\cdot d\vec{S}_{lat}}_{0\ (\vec{E}\perp d\vec{S}_{lat})} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad 2\,E(M)\,S = \frac{\sigma_0 S}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad \boxed{E(M) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}}$$



Le champ subit une <u>discontinuité</u> de $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ en $z=0$.

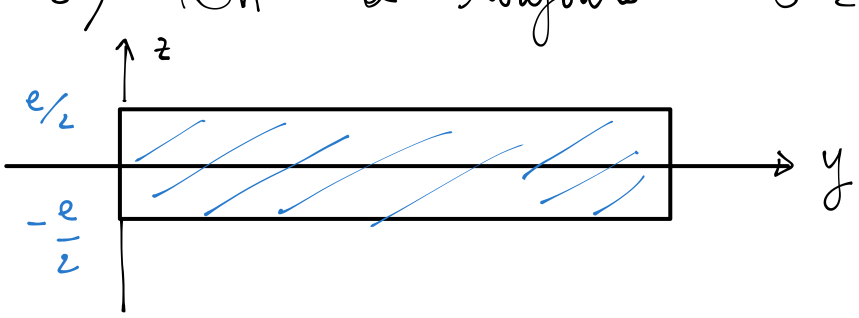
2) a)



Pour que les deux distributions soient équivalentes, on doit avoir :

$$S\sigma_0 = S e \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_0 = \rho_0 e}$$

b) On a toujours $\vec{E} = E(z)\,\vec{u}_z$



Soit M un point du plan Oxy → le plan Oxy est un plan de symétrie, le champ $\vec{E}(M)$ doit donc appartenir au plan (Oxy) ⇒ on a donc $\boxed{E(0) = 0}$

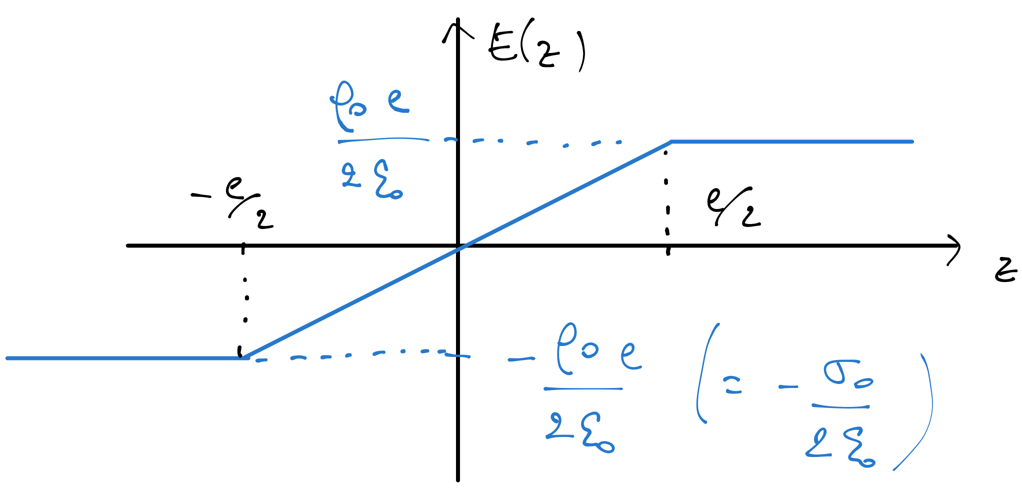
Equation de Maxwell - Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

<u>1er cas</u> : $-\dfrac{e}{2} \leqslant z \leqslant \dfrac{e}{2}$ $\qquad \dfrac{dE}{dz} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}$

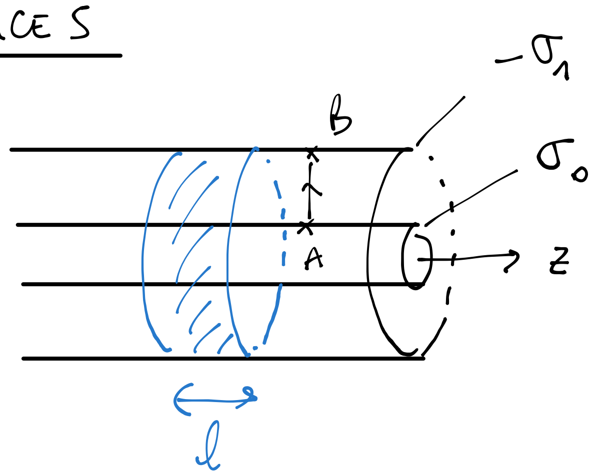
$$\Rightarrow \quad E(z) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} z + C$$

$E(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \qquad$ soit $\boxed{E(z) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} z}$

<u>2e cas</u> : $|z| > \dfrac{e}{2}$, $\rho(z) = 0 \Rightarrow \dfrac{dE}{dz} = 0$ le champ est constant en dehors de la couche chargée.



<u>EXERCICE 5</u>



1) Cylindre intérieur :

$$q_0 = \sigma_0 \times 2\pi a l$$

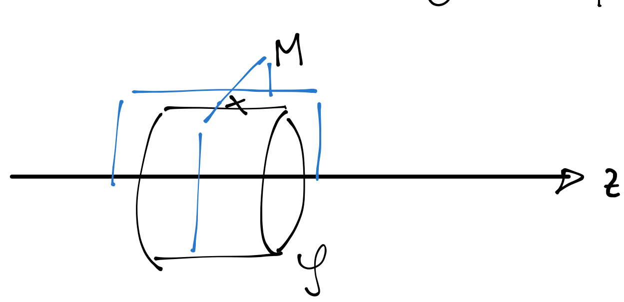
Cylindre extérieur :

$$q_1 = \sigma_1 \times 2\pi b l$$

$$\sigma_1 = -\sigma_0 \frac{a}{b} \Rightarrow q_1 = -\sigma_0 2\pi a l$$

Les charges en regard portées par les deux cylindres sont opposées

2)



Soit M un point entre les deux cylindres : $a < r < b$

<u>Symétrie</u> : les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ sont des plans de symétrie de la distribution

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\,\vec{u_r}$$

<u>Invariances</u> : la distribution est invariante par rotation et translation d'axe (Oz)

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u_r}$$

Théorème de Gauss : $\displaystyle\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$

ε au lieu de ε_0 dans le diélectrique

$\mathcal{S}$ = cylindre d'axe (Oz), de hauteur l, passant par M

$$2\pi r l \, E(M) = \frac{Q_l}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{E(M) = \frac{Q_l}{2\pi \varepsilon l r}}$$

Soit A un point sur le cylindre intérieur et B un point sur le cylindre extérieur :

$$V_A - V_B = \int_A^B -dV \qquad \text{et} \qquad -dV = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \cdot \overrightarrow{dOM} = \vec{E}\cdot\overrightarrow{dOM}$$

$$U = \int_A^B \vec{E}\cdot\overrightarrow{dOM}$$

Soit $\displaystyle U = \int_a^b \frac{Q_l}{2\pi\varepsilon l r}\,dr \Rightarrow \boxed{U = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\varepsilon l} Q_l}$

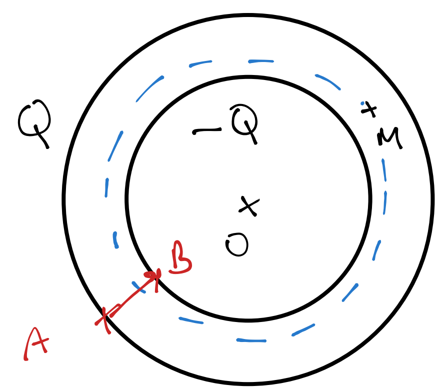
3) $Q_l = C_l\, U$ avec $\displaystyle C_l = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Pour $l = 1\,m$: $C_l = 1.10^{-10}$ F

On peut en général négliger la capacité du câble coaxial pendant les TP.

EXERCICE 6

1) Symétrie : tous les plans contenant la droite (OM) sont des plans de symétrie $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\,\vec{u}_r$



Invariance : la distribution est invariante par toute rotation de centre O $\Rightarrow E(M) = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})$

Finalement : $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r}$

Théorème de Gauss : $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

On prend $\mathcal{S}$ = sphère de centre O, passant par M $\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = -\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

Soit $\boxed{E(r) = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

2) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow -\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r) = V_0 - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$V(R+h) - V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

La différence de potentiel : $U = \dfrac{Q\,h}{4\pi\varepsilon_0\, R(R+h)}$

$\Rightarrow$ condensateur de capacité $\boxed{C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\, R(R+h)}{h}} \xrightarrow[h \to 0]{} \dfrac{\varepsilon_0\, 4\pi R^2}{h}$ cf condensateur plan

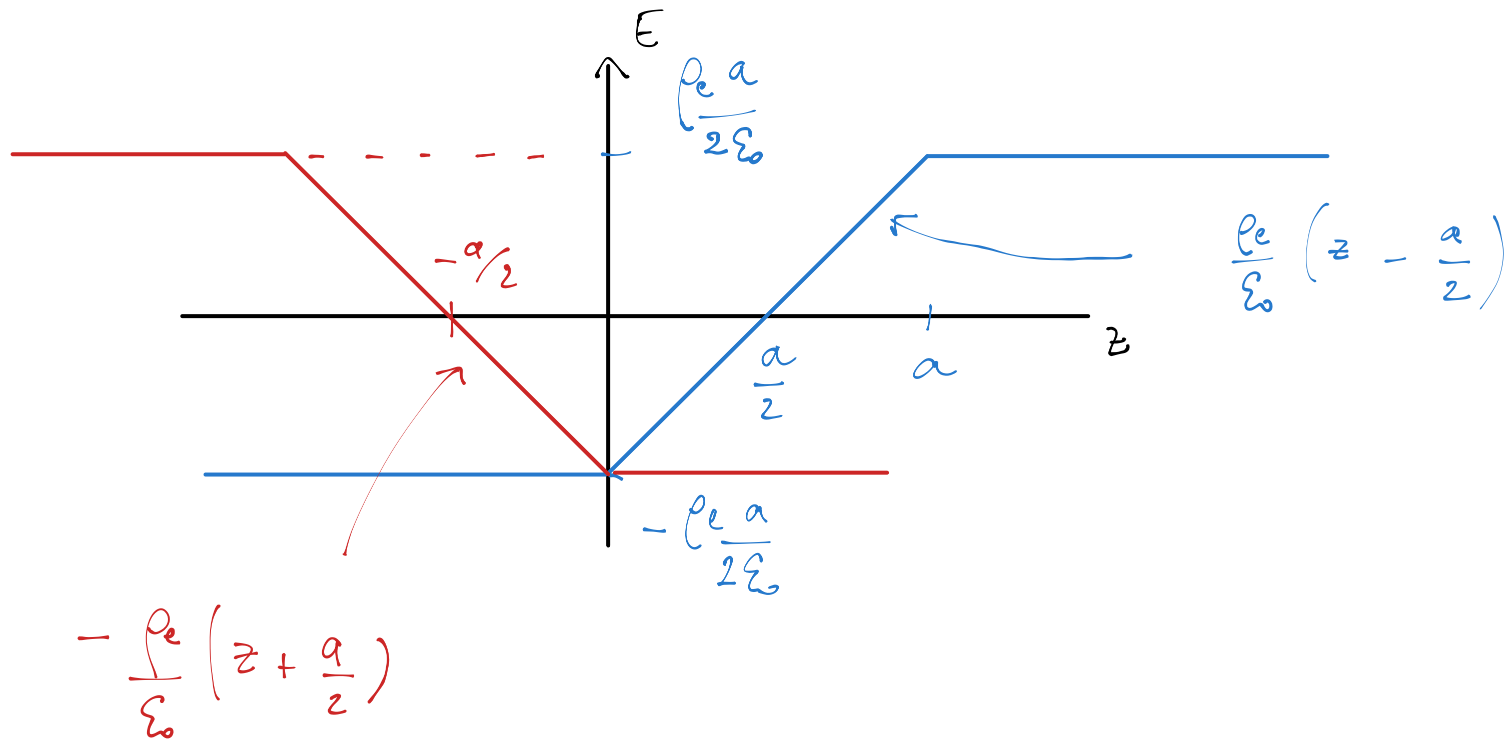
3) a) Comme précédemment : $\boxed{\vec{E} = \dfrac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r}$ pour $r > R$

b) $\Rightarrow V(r) = \dfrac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r}$ en prenant $V \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$

c) $E = \dfrac{V}{R}$: à potentiel fixe, le champ est d'autant plus intense que le rayon de courbure R de l'objet est faible.

EXERCICE 7

1) On s'intéresse tout d'abord au champ créé par une couche d'épaisseur a (voir exercice 4) et on va utiliser le principe de superposition pour obtenir le champ créé par la double couche.



On obtient alors :

$z \leq -a \qquad E(z) = 0$

$-a \leq z \leq 0 \qquad E(z) = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} z - \frac{\rho_e a}{\varepsilon_0}$

$0 \leq z \leq a \qquad E(z) = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} z - \frac{\rho_e a}{\varepsilon_0}$

$a \leq z \qquad E(z) = 0$

On intègre pour obtenir le potentiel $\left(E = -\frac{dV}{dz} \text{ ici}\right)$

$z \geq a \qquad V(z) = V(a)$

$0 \leq z \leq a \qquad V(z) = -\frac{\rho_e}{2\varepsilon_0}(z^2 - a^2) + \frac{\rho_e a}{\varepsilon_0}(z - a) + V(a)$

$z \leq -a \qquad V(z) = V(-a)$

$-a \leq z \leq 0 \qquad V(z) = \frac{\rho_e}{2\varepsilon_0}(z^2 - a^2) + \frac{\rho_e a}{\varepsilon_0}(z + a) + V(-a)$

2) Le potentiel est continu en $z = 0$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\rho_e}{2\varepsilon_0}\left(-a^2\right) - \frac{\rho_e a^2}{\varepsilon_0} + V(a) = \frac{\rho_e}{2\varepsilon_0}\left(-a^2\right) + \frac{\rho_e a^2}{\varepsilon_0} + V(-a)$$

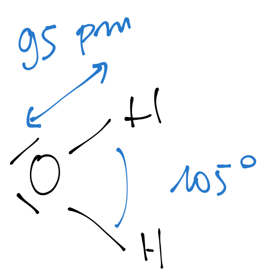
Soit $$\boxed{V(a) - V(-a) = \frac{\rho_e a^2}{\varepsilon_0}}$$

3) On a alors : $\rho_e = \dfrac{\varepsilon_0 U_d}{a^2}$

A.N : $\rho_e = \dfrac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \times 0{,}8}{10^{-12}} = 7{,}1 \ C \cdot m^{-3}$

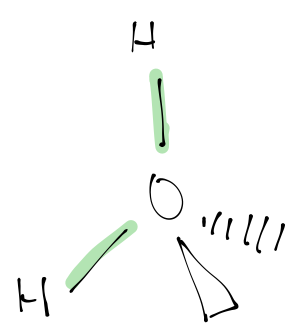
EXERCICE 8

1)



L'oxygène est entouré de 4 doublets : 2 doublets liants vers les H et 2 doublets non liants.

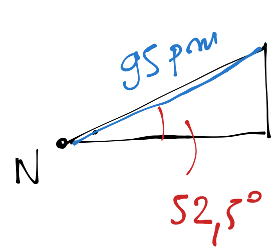
Les doublets se repoussent (répulsion électrostatique ils sont chargés négativement), ils se répartissent dans l'espace de façon à être le plus éloigné possible les uns des autres :



La molécule d'eau a alors une forme coudée (on a utilisé la méthode VSEPR)

2) L'oxygène O est le barycentre des charges négatives N

Le barycentre des charges positives est au milieu des deux hydrogènes (O est plus électronégatif que H : il porte la charge négative).

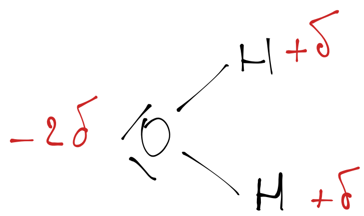


A.N : $NP = 95 \cdot \cos(52{,}5)$

$NP = 58$ pm

3) On a $p = q\,N\ell$ $\Rightarrow$ $q = \dfrac{p}{N\ell}$

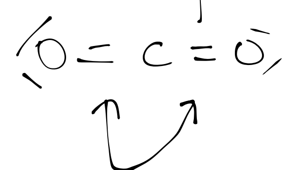
A.N : $q = 1.10^{-19}$ C



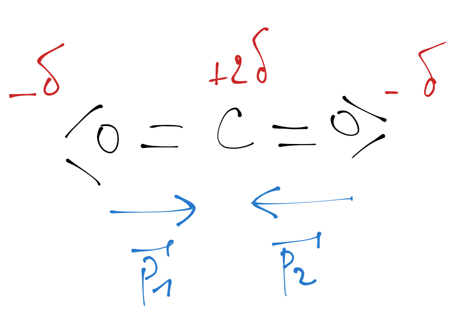
La charge partielle δ vaut donc $0{,}5.10^{-19}$ C soit environ $\dfrac{e}{3}$.

4) Au niveau de la baguette en plastique le champ électrostatique est intense. Sous l'effet de ce champ extérieur les molécules d'eau vont s'orienter le long des lignes de champ (couple $\vec{C} = \vec{p}_1 \wedge \vec{E}$) et migrer vers les zones où $\vec{E}$ est intense $\Rightarrow$ le filet se rapproche de la baguette.

5) La molécule de CO_2 n'est donc pas coudée.
Son schéma de Lewis est :



la présence des doubles liaison est à l'origine de la géométrie linéaire de la molécule.



les deux moments dipolaires se compensent.

EXERCICE 9

On choisit un champ électrique polarisé rectilignement suivant $\vec{u}_x$ se propageant suivant $\vec{u}_z$: $\vec{E} = E_0\, e^{i(\omega t - kz)}\,\vec{u}_x$ $\quad (\vec{k} = k\,\vec{u}_z)$

Le moment dipolaire associé à la molécule s'écrit :

$$\vec{p} = \sum_i q_i\,\vec{OM_i}$$

(M_i, q_i) étant associé à la charge ponctuelle q_i (électron ou noyau) située au point M_i.

O désigne un point quelconque de la molécule.

La résultante $\vec{R}$ de la force électrostatique s'écrit :

$$\vec{R} = \sum_i q_i \, E_0 \, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{OM_i})} \, \vec{u_x}$$

$$= E_0 \sum_i q_i \, e^{j(\omega t - k z_i)} \, \vec{u_x}$$

Si la longueur d'onde associée au champ $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ est beaucoup plus grande que la taille de la molécule alors :

$$k z_i = \frac{2\pi}{\lambda} z_i \ll 1 \qquad (z_i = \vec{OM_i} \cdot \vec{u_z})$$

$$\Rightarrow \quad e^{-jkz_i} \simeq 1 - jkz_i$$

On peut alors ré-écrire :

$$\vec{R} = E_0 \, e^{j\omega t} \, \vec{u_x} \left(\underbrace{\sum_i q_i}_{\text{nul car la molécule est globalement neutre}} - jk \underbrace{\sum_i q_i z_i}_{\vec{p}\cdot\vec{u_z}} \right)$$

On obtient ainsi $\vec{R} = -j \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{p}}_{\text{projection du moment dipolaire sur le vecteur d'onde}} E_0 \, e^{j\omega t} \, \vec{u_x}$

Le raisonnement est analogue si on prend $\vec{k} = k_y \vec{u_y} + k_z \vec{u_z}$