Interro de cours _ EM _ Ch 1

1) $$\underbrace{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\text{flux de } \vec{E} \text{ à travers } \mathcal{S} \text{ surface fermée}} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$ Théorème de Gauss

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$ La circulation de $\vec{E}$ sur un contour fermé $\mathcal{C}$ est nulle en statique

2) $$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ équation de Maxwell _ Gauss

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$$ équation de Maxwell _ Faraday

3) $$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \dots$$ rotationnel de $\vec{E}$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$ divergence de $\vec{E}$

4) $$\vec{\mathrm{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$ gradient de V

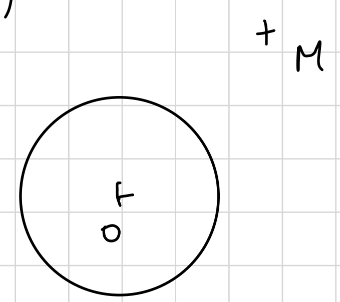
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$ Laplacien de V

5) $$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \iff \exists\, V \text{ tq } \vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}\,V$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mathrm{div}(-\vec{\mathrm{grad}}\,V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

soit $$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{équation de Poisson}}$$

6) a)



<u>Symétrie</u> : tous les plans contenant (OM) sont des plans de symétrie donc

$$\vec{E}(M) = E(M)\,\vec{u_r}$$

($\vec{E}$ appartient à l'intersection de tous ces plans)

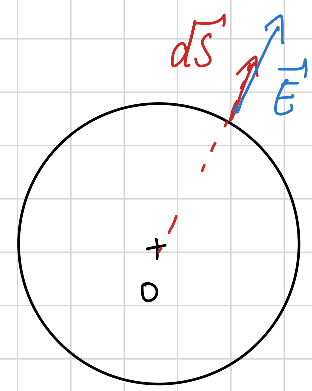
<u>Invariances</u> : la distribution est invariante par toute rotation de centre O

$$\Rightarrow \quad E(M) = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})$$

Finalement $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u_r}}$

b) $\mathcal{S}$ = sphère de centre O passant par M

Théorème de Gauss : $\displaystyle\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$



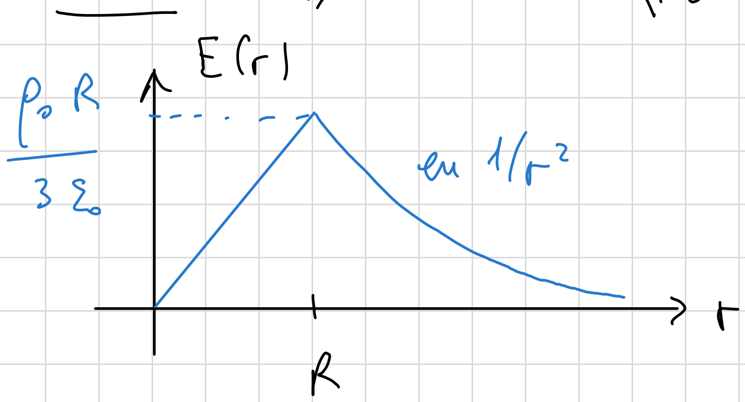
$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{\text{Sphère}} E(r)\,dS \quad \text{car } \vec{E} \text{ et } \vec{dS} \text{ sont colinéaires}$$

$$= 4\pi r^2 E(r) \quad \text{car } E(r) \text{ uniforme sur la sphère de rayon } r$$

<u>1er cas</u> $r \leq R$ $\qquad Q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\, r}$$

<u>2e cas</u> $r \geq R$ $\qquad Q_{int} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(r) = \frac{R^3 \rho_0}{3 r^2 \varepsilon_0}}$



(c) Tous les plans contenant le point O sont des plans de symétrie de la distribution $\Rightarrow$ $\vec{E}(O)$ appartient à l'intersection de tous ces plans, il est donc nul.