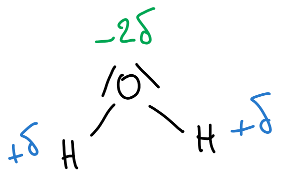
Électromagnétisme
Chapitre 3 - Dipôle électrostatique



molécule polaire

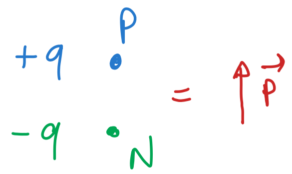
I. Potentiel et champ électrostatique créé par un dipôle

1. Approximation dipolaire

Définition :
On appelle dipôle électrostatique le système constitué de deux charges opposées : $-q$ en N et $+q$ en P dont on étudie les effets à une distance grande devant leur distance mutuelle. *Plus généralement, pour une distribution de charges globalement neutre, le point P désigne le barycentre des charges positives et N le barycentre des charges négatives.*
Le vecteur **moment dipolaire** :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$

permet de décrire le comportement du dipôle. Il s'exprime en C.m.



Rq : pour une distribution $\{q_i, M_i\}$ $\quad \vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OM_i} \quad \left(\sum_i q_i = 0\right)$

Ordre de grandeur : dans une molécule, la charge q est de l'ordre de 10^{-19}C et la distance inter-atomes est de l'ordre de 10^{-10}m, le moment dipolaire d'une molécule est de l'ordre de 10^{-29}C.m. On utilise alors une autre unité : le Debye (D)

$$1D = \frac{1}{3}.10^{-29}\text{C.m}$$

$$p(H_2O) = 1,85 \text{ D}$$

$\rightarrow p(H_2O) = 0,6.10^{-29}$ C.m

On va déduire l'expression du champ électrostatique de celle du potentiel V en utilisant la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

2. Potentiel électrostatique

On choisit l'orientation du repère de façon à avoir :

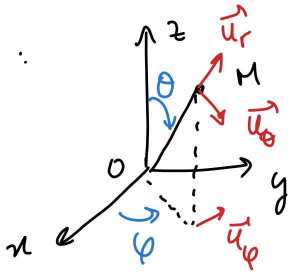
$$\overrightarrow{OP} = a/2\vec{u}_z \ ; \ \overrightarrow{ON} = -a/2\vec{u}_z \Rightarrow \vec{p} = q\ a\ \vec{u}_z$$

On utilise les coordonnées sphériques et on considère un point M tel que $OM \gg a$ (approximation dipolaire).

Invariances : la distribution de charges est invariante par rotation d'axe (Oz) : le potentiel V ne dépend pas de φ.

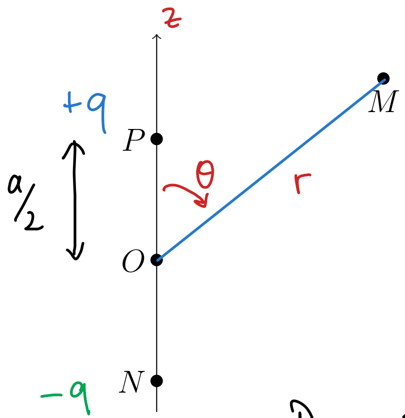
$V(M) = V(r, \theta, \cancel{\varphi})$

Rappel :



$\varphi \in [0, 2\pi[$
$\theta \in [0, \pi]$

Symétrie : le plan contenant l'axe (Oz) et le point M est un plan de symétrie : le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan. $\rightarrow E_\varphi = 0$



$$PM^2 = (\vec{PO}+\vec{OM})\cdot(\vec{PO}+\vec{OM})$$
$$= \frac{a^2}{4} + r^2 - 2\,\vec{OM}\cdot\vec{OP}$$
$$= \frac{a^2}{4} + r^2 - a\,r\cos\theta$$
$$\Rightarrow \frac{1}{PM} = \left(r^2\left(1-\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{a^2}{4r^2}\right)\right)^{-1/2} \qquad \frac{a}{r} \ll 1$$
$$\simeq \frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

De même : $\frac{1}{NM} \simeq \frac{1}{r}\left(1-\frac{a}{2r}\cos\theta\right)$

D'autre part : $\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o PM} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o NM}}$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1+\frac{a}{2r}\cos\theta - 1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$$

En utilisant les expressions de PM et NM, on obtient :

$$\boxed{V(M) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_o r^2}}$$

Commentaires :

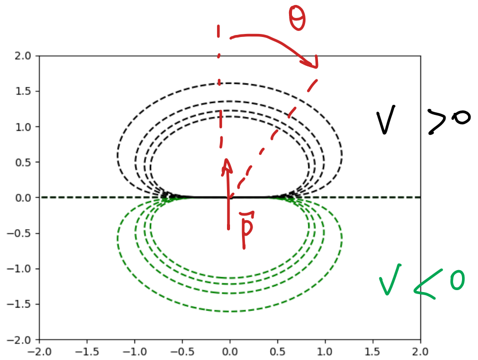
— Le potentiel électrostatique décroit plus rapidement que celui d'une charge ponctuelle ($1/r^2$ dans le cas du dipôle et $1/r$ pour une charge ponctuelle).

— En écrivant : $\vec{p}.\vec{u}_r = p\cos(\theta)$ et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$, on obtient l'expression intrinsèque (c'est-à-dire indépendante du système de coordonnées) :

$$V(M) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

— $V(M)$ est positif si $\theta \in [0, \pi/2]$ et négatif pour $\theta \in [\pi/2, \pi]$. L'équipotentielle de valeur $V_o > 0$ a pour équation :

$$r = \pm K\sqrt{\cos(\theta)}$$



Surfaces équipotentielles

3. Champ électrostatique créé en M

On en déduit alors l'expression du champ électrostatique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \iff \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3} \; ; \; E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3} \; ; \; E_\varphi = 0}$$

Vérification :
- Pour $\theta = 0$: le point M appartient à l'axe (Oz), pour des raisons de symétrie $\vec{E}$ doit être porté par (Oz), ce qui est en accord avec $E_\theta(r, \theta = 0) = 0$.
- Pour $\theta = \pi/2$: le point M appartient au plan médiateur du segment $[PN]$ qui est un plan d'antisymétrie. $\vec{E}(M)$ doit être orthogonal à ce plan : $E_r(r, \theta = \pi/2) = 0$.

Expression intrinsèque : en écrivant

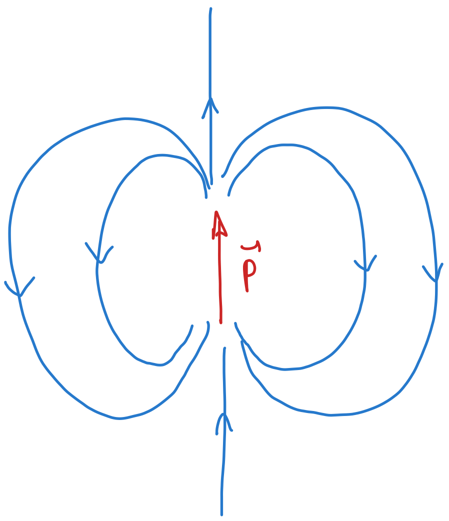
$$\vec{p} = p\cos\theta\vec{u}_r - p\sin\theta\vec{u}_\theta$$

On peut montrer que :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^3}\left(3(\vec{p}.\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}\right)$$

Cette expression est utile notamment lorsqu'on étudie l'interaction entre deux dipôles.

Allure des lignes de champ (loin du dipôle)



Démo : $\vec{d\ell} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

colinéaire à $\vec{E} = E_r\vec{u_r} + E_\theta\vec{u_\theta}$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{r\,d\theta}{\sin\theta}$$

pour $\theta \neq 0$

Axe (Oz) = ligne de champ (symétrie)

$$\frac{dr}{r} = 2\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta}$$

Soit $\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = 2\ln(\sin\theta)$

$\Rightarrow r = r_0 \sin^2\theta$

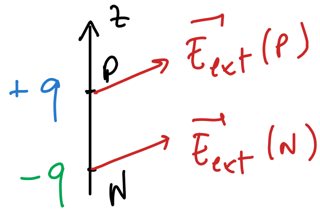
II. Action d'un champ électrostatique extérieur sur le dipôle $\vec{p}$

Le dipôle $\vec{p}$ est placé dans une zone où règne un champ électrostatique $\vec{E}_{ext}$ créé par une distribution $\mathcal{D}$. L'approximation dipolaire permet de considérer ici que le champ varie $\vec{E}_{ext}$ peu au niveau du dipôle.

1. Cas d'un champ uniforme

L'action subie par le dipôle est caractérisée par sa résultante $\vec{R}$ et son moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ en O.

$$\vec{R} = q\vec{E}_{ext}(P) - q\vec{E}_{ext}(N)$$



Le champ $\vec{E}_{ext}$ étant uniforme, la résultante :

$$\vec{R} = \vec{0}$$

L'action subie par le dipôle est donc un couple : son moment doit être identique en tout point de l'espace. On a en effet :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OP} \wedge q\vec{E}_{ext}(P) + \overrightarrow{ON} \wedge (-q)\vec{E}_{ext}(N)$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = q(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \wedge \vec{E}_{ext} \;\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NP}$

et $q\overrightarrow{NP} = \vec{p}$

L'énergie potentielle s'écrit :

$$\mathcal{E}_p = qV_{ext}(P) - qV_{ext}(N)$$

Si on utilise les coordonnées cartésiennes :

$$V_{ext}(P) = V_{ext}(0, 0, a/2)$$

Soit, en effectuant un développement de Taylor :

$$V_{ext}(P) = V_{ext}(O) + \frac{a}{2}\frac{\partial V_{ext}}{\partial z}$$

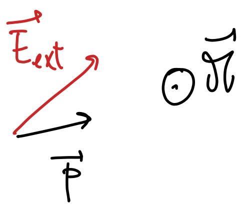
De même :

$$V_{ext}(N) = V_{ext}(O) - \frac{a}{2}\frac{\partial V_{ext}}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_p = q\ a\ \frac{\partial V_{ext}}{\partial z} \text{ soit } \mathcal{E}_p = -pE_{ext,z}$$

> L'action d'un champ électrique extérieur **uniforme** sur un dipôle $\vec{p}$ est un couple de résultante nulle et de moment :
>
> $$\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$
>
> L'énergie potentielle associée s'écrit :
>
> $$\mathcal{E}_p = -\vec{p}.\vec{E}_{ext}$$

Conséquences :



$\vec{p}$ tend à s'aligner sur les lignes de champ du champ électrostatique

2. Cas d'un champ quasi-uniforme

L'expression du moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ et de l'énergie potentielle sont toujours valables :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p}.\vec{E}_{ext}$$

La résultante $\vec{R}$ n'est plus nulle.

— Si on considère que le dipôle s'est aligné sur une ligne de champ du champ électrique extérieur. L'énergie potentielle est minimale lorsque $\|\vec{E}_{ext}\|$ est maximale. Le dipôle va migrer vers les zones où le champ extérieur est plus intense. On écrit alors dans ce cas (penser à $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$) :

$$R_z = -\frac{d}{dz}(-p_z.E_{ext,z})$$

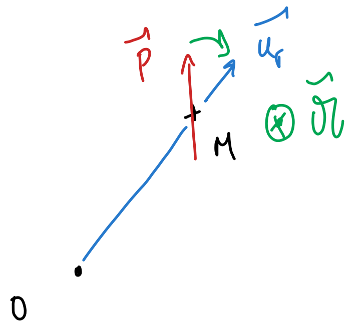
— L'expression générale de $\vec{R}$:

$$\vec{R} = (\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}})(\vec{E}_{ext})$$

Elle doit être donnée dans les exercices.

Exercice : Interaction entre une charge ponctuelle et un dipôle On place un dipôle électrostatique $\vec{p}$ en un point M, à proximité d'une charge ponctuelle q située en O.

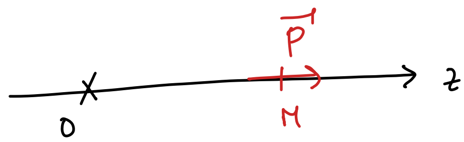
1. Montrer que le dipôle s'oriente radialement par rapport à la charge q.
2. Déterminer alors l'expression de l'énergie potentielle du dipôle et de la force subie par le dipôle dans le champ de la charge ponctuelle.
3. Même question pour la charge q.



1) $\vec{E}_{ext} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ coord. sphériques de centre O

$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ tend à aligner $\vec{p}$ sur (OM)

2) On a alors



$E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{ext} = \dfrac{-pq}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p = -\dfrac{2pq}{4\pi\varepsilon_0 z^3}\vec{u}_z$

3) La charge ponctuelle subit $\vec{E}_{dipole} = \dfrac{2p}{4\pi\varepsilon_0 z^3}\vec{u}_z$ (pour $\theta = \pi$ coord. sph de centre M)

$\Rightarrow \vec{F}_{/charge} = q\vec{E} = \dfrac{2pq}{4\pi\varepsilon_0 z^3}\vec{u}_z$ C'est bien l'opposé de la force subie par le dipôle