Électromagnétisme

Chapitre 4 - Les transports de charge : les courants

Courant : mouvement d'ensemble de charges.
Milieux conducteurs :

1. Conducteur métallique : les électrons de conduction assurent le passage du courant (10^{28} électrons de conduction par m^3).
2. Semi-conducteur : le courant est assuré par le déplacement d'électrons et de "lacunes électroniques". Leur densité volumique est beaucoup plus faible (environ 10^{22} par m^3).
3. En solution aqueuse, les ions assurent le passage du courant. *Estimer le nombre d'ions par unité de volume pour une concentration molaire de 0,1 mol/L en ions sodium Na^+.*

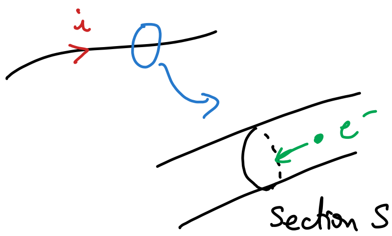
$$N_v = \frac{0{,}1 \times 6.10^{23}}{10^{-3}} = 6.10^{25} \text{ ions } Na^+ \text{ par } m^3$$

I. Distribution de courant

1. Densité volumique de courant

On considère un fil conducteur parcouru par un courant d'intensité i. Soit $\mathcal{S}$ la section du fil.

$$i = \frac{dq}{dt}$$



dq étant la charge traversant $\mathcal{S}$ pendant le temps dt.
Dans le TD0, on a défini le débit volumique :

$$D_v = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v}.d\vec{S}$$

Exercice :
Déduire de l'expression de D_v (volume traversant la section $\mathcal{S}$ pendant dt) une intégrale donnant l'intensité i du courant.
L'intégrale :

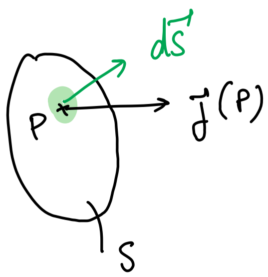
$$\iint_{\mathcal{S}} \rho\vec{v}.d\vec{S}$$

→ voir démonstration

correspond à la quantité de charge traversant dS pendant dt (en prenant ρ densité volumique de charge).
On introduit le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ tel que :

$$\underbrace{i}_{A} = \iint_{P\in\mathcal{S}} \vec{j}(P).\underbrace{d\vec{S}}_{m^2}$$

$\vec{j}$ en $A.m^{-2}$



$$\vec{j} = \rho_m\vec{v}$$

$\vec{v}$: vitesse d'ensemble des porteurs de charge

ρ "mobile" = charges en mouvement

Ordre de grandeur : On considère un fil de cuivre de section $s = 1\text{mm}^2$, parcouru par un courant d'intensité $i = 1\text{A}$. Donner un ordre de grandeur de j, ρ_m et v. Comparer la vitesse d'ensemble des porteurs de charges à la vitesse d'agitation thermique à température ambiante. On donne :

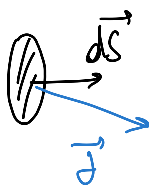
$$n = 10^{29}\ \text{m}^{-3}\ ;\ k_B = 1,4.10^{-23}\ \text{J.K}^{-1}\ ;\ m_e = 10^{-30}\ \text{kg}$$

* $j = \dfrac{i}{s} \rightarrow j = 10^6\ \text{A.m}^{-2}$ * $|\rho_m| = n.e \Rightarrow |\rho_m| \sim 10^{10}\ \text{C.m}^{-3}$

* $j = \rho_m v \rightarrow v = \dfrac{10^6}{10^{10}} = 10^{-4}\ \text{m.s}^{-1}$ vitesse d'ensemble des porteurs de charge.

$\frac{1}{2} m v_{th}^2 = \frac{3}{2} k_B T \rightarrow v_{th} \sim 10^5\ \text{m.s}^{-1}$ mouvement désordonné

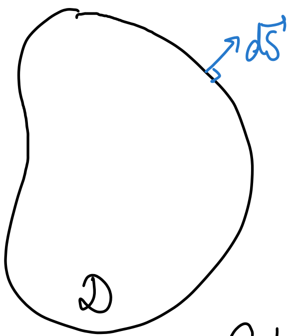
$\vec{j}.d\vec{S}\ dt$ correspond à la charge traversant la surface élémentaire $d\vec{S}$ pendant dt.



$\vec{j}.\vec{dS} > 0$: la charge dq traversant $\vec{dS}$ de la gauche vers la droite pendant dt est positive.

2. Conservation de la charge

On considère un système $\mathcal{D}$ de surface $\mathcal{S}$. Le vecteur $d\vec{S}$ est orienté de l'intérieur vers l'extérieur de $\mathcal{D}$. On va écrire l'équation de conservation de la charge qui traduit le fait qu'il n'y a pas de création de charges dans $\mathcal{D}$: si la charge dans $\mathcal{D}$ varie c'est qu'il y a eu un flux de charges (c'est à dire un courant) à travers $\mathcal{S}$.



charge dans $\mathcal{D}$ à $t+dt$ = charge dans $\mathcal{D}$ à t − charge sortie à travers S | - dt

$$\iiint_{\mathcal{D}} \rho(t+dt)\, d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(t)\, d\tau - \underbrace{\oiint_S \vec{j}.\vec{dS}\ dt}_{\text{G.O.}\ \downarrow\ \iiint_{\mathcal{D}} \text{div}\,\vec{j}\, d\tau\, dt}$$

Soit $\iiint_{\mathcal{D}} \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j}\right) d\tau\ dt = 0$

valable quel que soit $\mathcal{D}$

On a alors :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0}\ \ *$$

Équation locale traduisant la conservation de la charge.

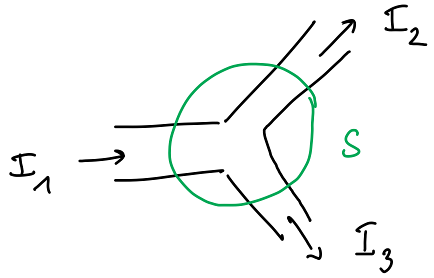
Commentaires :

* $\oiint_S \vec{j}\cdot\vec{dS} = 0$
* Un tube de champ transporte un flux constant

— En régime stationnaire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$$

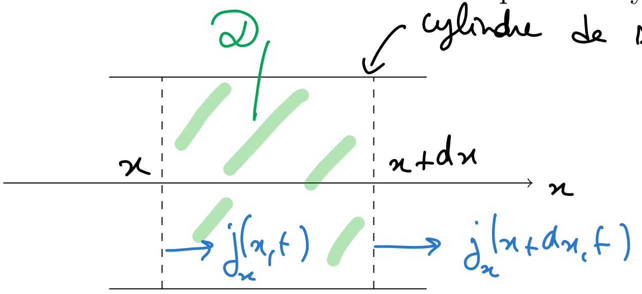
$\vec{j}$ est à flux conservatif : il s'agit de la loi des nœuds qui n'est plus valable en régime variable.



$$\oiint_S \vec{j}\cdot\vec{dS} = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3$$

en régime permanent.

— Il faut savoir faire la démonstration pour un système à une dimension.



$\vec{j} = j_x(x,t)\vec{u}_x$

$\rho = \rho(x,t)$

charge dans $\mathcal{D}$ à $t+dt$ = charge dans $\mathcal{D}$ à t + charge entrée en x pendant dt − charge sortie en $x+dx$ pendant dt

$$\rho(x,t+dt)\,S\,dx = \rho(x,t)\,S\,dx + j_x(x,t)\,S\,dt - j_x(x+dx,t)\,S\,dt$$

$$\Rightarrow \underbrace{\big(\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)\big)}_{\frac{\partial \rho}{\partial t}dt}\,S\,dx = -\underbrace{\big(j_x(x+dx,t) - j_x(x,t)\big)}_{\frac{\partial j_x}{\partial x}dx}\,S\,dt$$

Soit $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

(On a bien $\mathrm{div}\,\vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x}$ pour $\vec{j} = j_x(x,t)\vec{u}_x$)

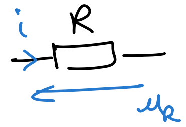
II. Loi d'Ohm locale

1. Loi d'Ohm locale

Dans le cas des conducteurs ohmiques, on a vu la relation :

$$u_R = Ri$$

Loi d'Ohm



L'équation locale correspondante :

$A.m^{-2}$ $V.m^{-1}$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Loi d'Ohm locale

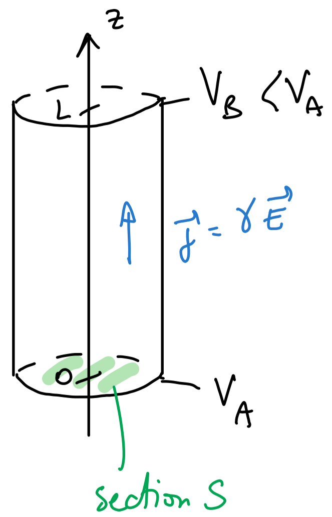
γ désigne la conductivité du matériau. → en $S.m^{-1}$ (1 Siemens = $1\Omega^{-1}$)

La conductivité du cuivre (bon conducteur) est de 6.10^7S.m^{-1}. Le modèle du conducteur parfait correspond à la limite $\gamma \to \infty$. Il s'agit d'une loi **phénoménologique** (elle n'est pas démontrée mais validée par les résultats expérimentaux).

2. Résistance d'un cylindre conducteur

On considère un cylindre d'axe (Oz), de section S, de conductivité γ. Le cylindre est soumis à une différence de potentiel :

$$V(0) = U \; ; V(L) = 0$$



Le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ est considéré uniforme :

$$\vec{j} = j\,\vec{u}_z$$

Le courant à travers S :

$$i = \iint_S \vec{j}.d\vec{S} \Rightarrow i = jS$$

On a d'autre part :

$$u_{AB} = U = \int_0^L -dV \Leftrightarrow U = \int_0^L \vec{E}.d\vec{\ell}$$

En utilisant la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \Rightarrow U = \frac{1}{\gamma}\int \vec{j}.d\vec{\ell}$$

Comme j est uniforme :

$$U = \frac{jL}{\gamma}$$

Et finalement :

$$U = \frac{L}{\gamma S} i$$

La résistance d'un cylindre conducteur de longueur L et de section S s'écrit donc :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

Ordre de grandeur : estimer la résistance d'une bobine de 500 spires circulaires de rayon $r = 3$cm, pour un fil de cuivre ($\gamma = 6.10^7\text{S.m}^{-1}$) de section $s = 1\text{mm}^2$

A.N : $R = \dfrac{2\pi . 3.10^{-2} \times 500}{6.10^7 \,.\, 10^{-6}} = 1{,}6\Omega.$

3. Exercice : modèle de Drüde

cf TD.

Savoir faire : $\rho(O,M) = \rho_0$ dans un conducteur γ, estimer temps τ au bout duquel $\rho \to 0$