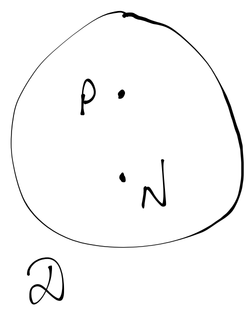
I. Etude de la force de Van der Waals

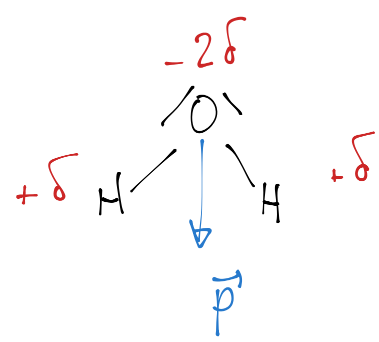
Q1. On considère une distribution de charges $\mathcal{D}$ globalement neutre dans laquelle le barycentre P des charges positives (charge totale $+q$) n'est pas confondu avec le barycentre N des charges négatives (charge totale $-q$).



$\mathcal{D}$ constitue alors un dipôle électrostatique de moment

$$\boxed{\vec{p} = q\,\vec{NP}}$$

Q2. La molécule d'eau H_2O est un exemple de dipôle électrostatique rencontré dans la nature. Son moment dipolaire $\|\vec{p}\|$ est de l'ordre de 10^{-29} C.m.



Q3. M se trouve à grande distance de O si la distance $r = OM$ est très grande devant NP taille caractéristique du dipôle.

Q4. En statique $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V$

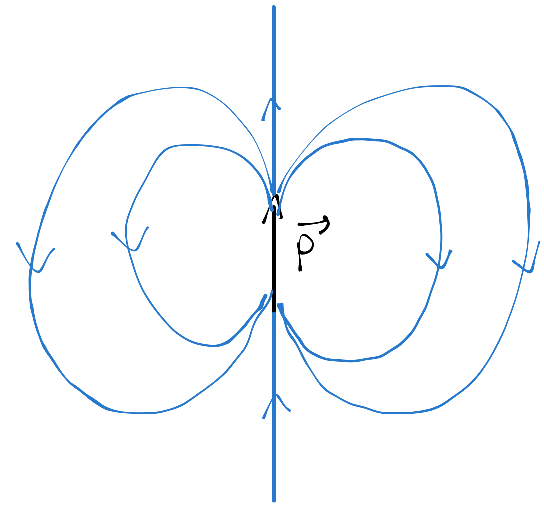
En coordonnés sphériques : $V(M) = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\[2ex] E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\[2ex] E_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases}$$

soit

$$\boxed{\begin{cases} E_r = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\[2ex] E_\theta = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\[2ex] E_\varphi = 0 \end{cases}}$$

Q5.



Q6.

En l'absence de champ extérieur le barycentre des charges négatives est confondu avec le noyau : $\vec{p} = \vec{0}$

Sous l'action de $\vec{E}_{ext}$ (force de Lorentz $q\vec{E}_{ext}$) le noyau et le nuage électronique se déplacent en sens opposés : il apparaît alors $\vec{p} \neq \vec{0}$ d'autant plus fort que E_{ext} est fort.

On observe sur la figure $\vec{NP}$ de même sens que $\vec{E}_{ext}$,

<u>α est donc positif.</u>

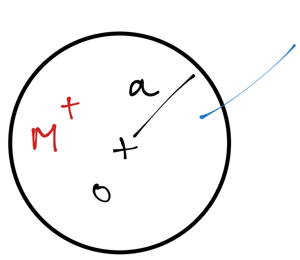
$$[\alpha] = \frac{[p]}{[\varepsilon_0 E]}$$

On a écrit : $E_r = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$$\Rightarrow \left[\frac{p}{\varepsilon_0 E}\right] = [r^3]$$

<u>α s'exprime en m^3</u>

Q7.



$\rho_0 = \dfrac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \dfrac{3e}{4\pi a^3}$ densité volumique de charges uniforme dans la boule de rayon a.

Déterminons le champ $\vec{E}(M)$ en un point M de la boule

Symétrie : tous les plans contenant (OM) sont des plans de symétrie $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(M)\,\vec{u_r}$

Invariance : la distribution est invariante par toute rotation de centre O $\Rightarrow E_r(M) = E_r(r)$

Finalement $\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{u_r}$

Théorème de Gauss : $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ avec $\mathcal{S}$ sphère de centre O de rayon r

$\Rightarrow 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\,\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{r}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e}{a^3}$$

L'électron est soumis à la force $\vec{F} = -e\,\vec{E}$

$$\boxed{\vec{F} = \underbrace{-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\,r\,\vec{u_r}}}$$

du type "force de rappel élastique"

Q8. À l'équilibre :

$$\vec{F} - e\,\vec{E}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow r_{eq}\,\vec{u_r} = -\frac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{e}\,\vec{E}_{ext}$$

Q9. Dans ce modèle P = O position fixe du noyau et N = position de l'électron. On a donc :

$$\vec{p} = e\left(-r_{eq}\,\vec{u_r}\right) \quad \text{soit} \quad \vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3\,\vec{E}_{ext}$$

$\boxed{\alpha = 4\pi a^3}$ dans ce modèle (bien homogène à un volume).

Pour l'atome d'hydrogène $a \simeq 0{,}5\cdot10^{-10}$ m $\Rightarrow \alpha \simeq 10^{-30}\ m^3$

Q10. Le nuage électronique d'un atome de rubidium peut se déformer à l'approche d'un autre atome, il apparaît alors un moment dipolaire (on parle d'interaction dipôle induit - dipôle induit).

Q11. L'énergie potentielle du deuxième dipôle dans le champ $\vec{E_1}$ créé par le premier dipôle s'écrit :

$$E_p = -\vec{p_2} \cdot \vec{E_1}$$

$$= -p_2 E_1 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \vec{p_2} = p_2 \vec{u_x} \\ \vec{E_1} = \dfrac{2 p_1}{4\pi \varepsilon_0 x^3} \vec{u_x} \quad \text{pour } \theta = 0 \end{cases}$$

On détermine $F_{1/2}$ en écrivant :

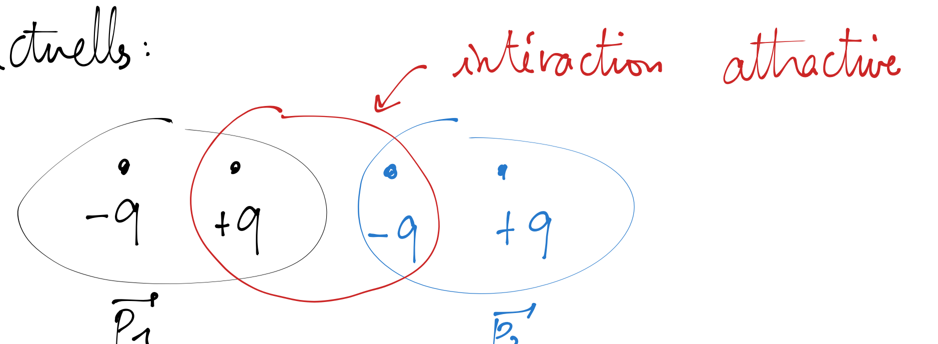
$$\vec{F_{1/2}} = -\vec{\text{grad}}\, E_p$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F_{1/2}} = p_2 \frac{dE_1}{dx} \vec{u_x}$$ compte tenu de l'expression de $\vec{E_1}$.

Q12. On a alors $$\vec{F_{1/2}} = p_2 \frac{(-6 p_1)}{4\pi \varepsilon_0 x^4} \vec{u_x}$$

En disant que p_2 est induit par E_1 soit p_2 proportionnel à E_1 on passe à une dépendance en $\frac{1}{x^7}$ (mais les justifications exactes sont compliquées).

Q13 Cette force est attractive (K est négative d'après ce qui précède).
On peut par exemple représenter les dipôles sous la forme de 2 charges ponctuelles :



Q14. On écrit $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p$ soit $\frac{K}{x^7} = -\frac{dE_p}{dx}$

$\Rightarrow \quad E_p = \frac{K}{6x^6}$