

# Électromagnétisme

## Chapitre 5 - Magnétostatique

Rappels de première année :

— Force de Lorentz subie par une particule chargée dans un champ  $\vec{E}, \vec{B}$  :

$$\vec{F}_{Lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

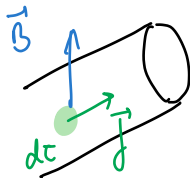
— Force de Laplace :

— subie par un élément de circuit  $d\vec{\ell}$  parcouru par un courant d'intensité  $i$  :



$$d\vec{F}_{Lap} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

— On peut à présent écrire la force de Laplace au niveau local, dans le cas d'un élément de volume  $d\tau$  en utilisant le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  :



$$d\vec{F}_{Lap} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

$\vec{j}$  = densité volumique de courant

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$A \cdot m^{-2}$

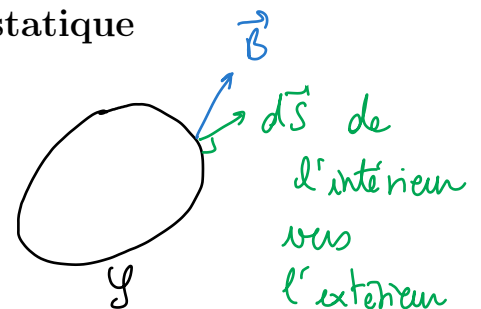
$$[j d\tau] = [i dl]$$

### I. Équations intégrales et locales de la magnétostatique

#### 1. Flux de $\vec{B}$ - Équation de Maxwell Flux

Soit  $S$  une surface fermée :

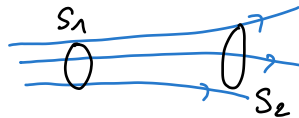
$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$



$\vec{B}$  est à flux conservatif.

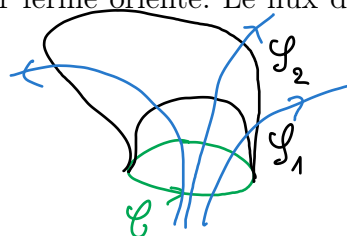
Conséquences :

— Un tube de champ transporte un flux constant.



$$\Phi_1 = \Phi_2 \text{ et } S_2 > S_1 \Rightarrow B_1 > B_2$$

— Soit  $C$  un contour fermé orienté. Le flux de  $\vec{B}$  à travers toutes les surfaces s'appuyant sur  $C$  est identique.



$\Phi_1 = \Phi_2 \rightarrow$  on utilise ce résultat en induction lorsqu'on calcule le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit

On en déduit également l'équation de Maxwell-Flux :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

équation locale

aussi appelé Maxwell - Thomson

## 2. Circulation de $\vec{B}$ - Équation de Maxwell Ampère

On part cette fois de l'équation de Maxwell-Ampère :

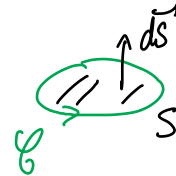
$$\boxed{\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \quad \text{Equation locale}$$

- Équation locale, reliant le champ magnétostatique (il faut la modifier en régime variable) à ses sources. ( $\vec{j}$ )
- $\mu_0$  désigne la **perméabilité du vide**. On peut retenir la valeur :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$$

Passons à la forme intégrale : soit  $\mathcal{C}$  un contour fermé orienté

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

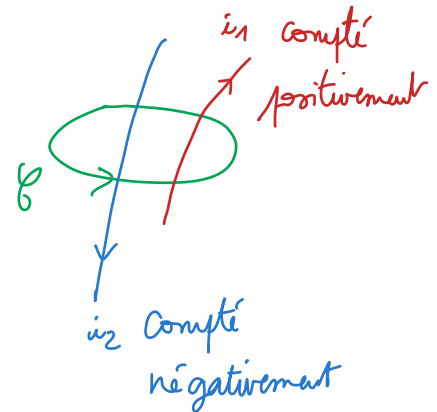


Soit en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

On obtient le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlace}}$$



### Remarques :

- Propriété mathématique : soit  $\vec{A}$  un champ de vecteurs (se démontre en coordonnées cartésiennes) :

$$\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$$

Si on applique l'opérateur divergence à l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient :

$$0 = \mu_0 \text{div} \vec{j}$$

$\vec{j}$  est à flux conservatif en statique. (= loi des nœuds)

- Dans le chapitre précédent, on a établi l'équation locale de conservation de la charge :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

On a d'autre part :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{commutent} \\ \text{div} \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \end{array} \right\}$$

En régime variable, l'équation de conservation de la charge est contenue dans l'équation de Maxwell-Ampère qui s'écrit alors :

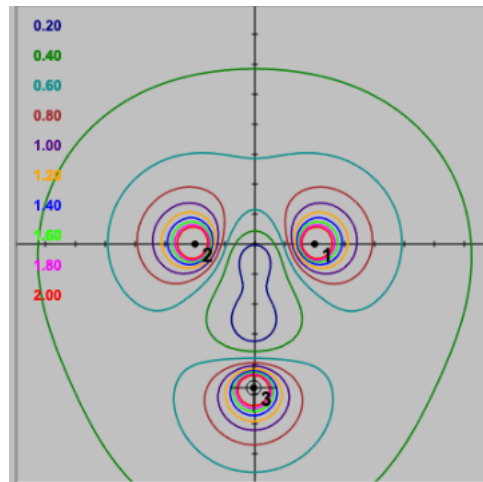
$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On remplace  $\vec{j}$  par  $\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

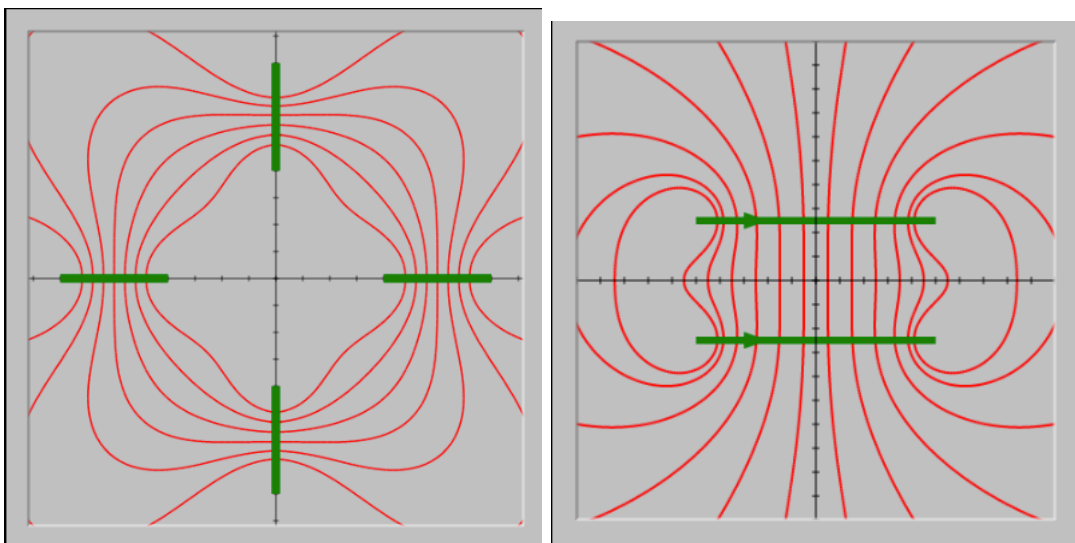
### 3. Topographie

Voir le site : <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/mnelectricite.html>

- Les lignes de champ sont des courbes fermées qui s'enroulent autour des sources (ou se ferment à l'infini voir exemple du solénoïde infini).
- Les lignes de champ sont orientées par la règle de la main droite.
- Un tube de champ transporte un flux constant : le champ magnétique est plus intense là où les lignes de champ se resserrent.



3 fils



## II. Calculs de champs magnétostatiques

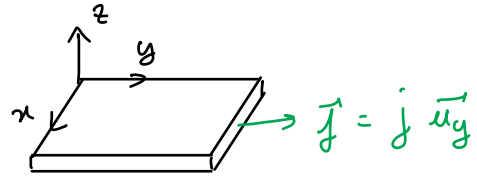
### 1. Invariances et symétrie

$\vec{B}$  présente les mêmes invariances que la distribution de courant. (principe de Curie)

Exemples : fil infini, nappe infinie

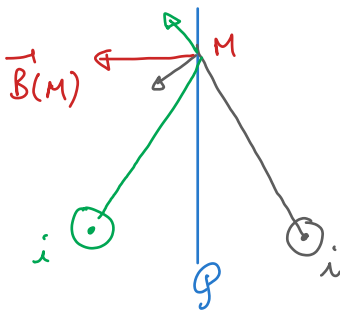


La distribution est invariante par rotation et translation d'axe ( $Oz$ )  
 $\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(r, \phi, z)$

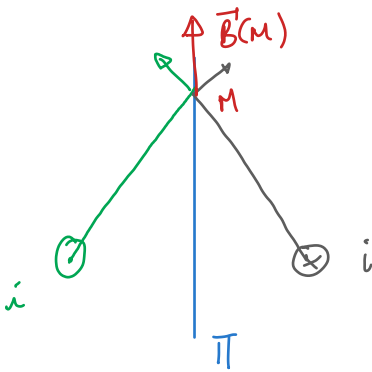


La distribution est invariante par translation suivant  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$   
 $\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(x, y, z)$

Avant d'étudier les symétries, on peut prévoir la direction de  $\vec{B}$  en utilisant la règle de la main droite.

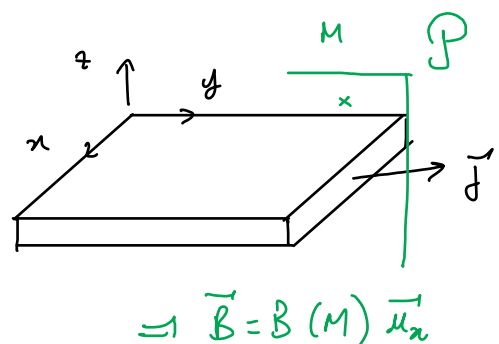
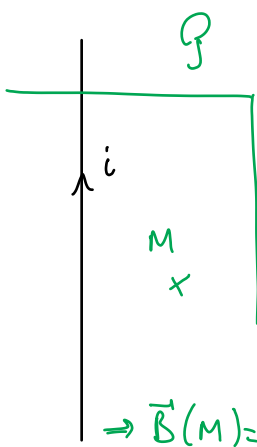


Soit  $\mathcal{P}$  un plan de symétrie (transforme  $\vec{j}$  en son symétrique) de la distribution de courant:  
 \* Si  $M \in \mathcal{P}$  alors  $\vec{B}(M) \perp \mathcal{P}$   
 \*  $M'_1 = \text{sym}_{\mathcal{P}}(M_1)$      $\vec{B}(M'_1) = -\text{sym}_{\mathcal{P}}(\vec{B}(M_1))$

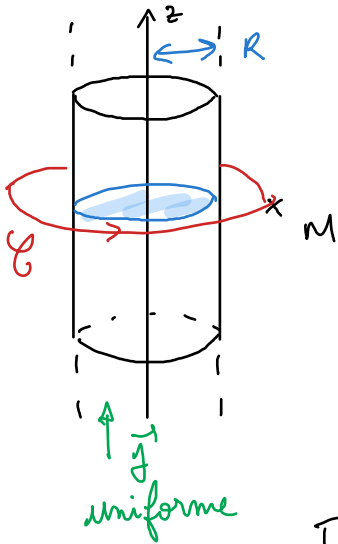


Soit  $\Pi$  un plan d'antisymétrie de la distribution de courant:  
 \* Si  $M \in \Pi$  alors  $\vec{B}(M) \in \Pi$   
 \*  $M'_1 = \text{sym}_{\Pi}(M_1)$      $\vec{B}(M'_1) = \text{sym}_{\Pi}(\vec{B}(M_1))$

Exemples :



2. Câble rectiligne infini



Symétrie: le plan contenant  $(Oz)$  et le point  $M$  est un plan de symétrie:  $\vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_\theta$

Invariances: la distribution de courant est invariante par translation et rotation d'axe  $(Oz) \Rightarrow B(M) = B(r)$

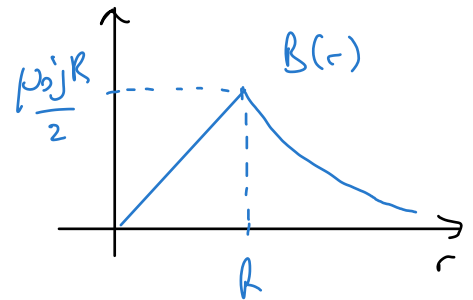
Finalement:  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$

Théorème d'Ampère:  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc\acute{e}l\acute{e}}$

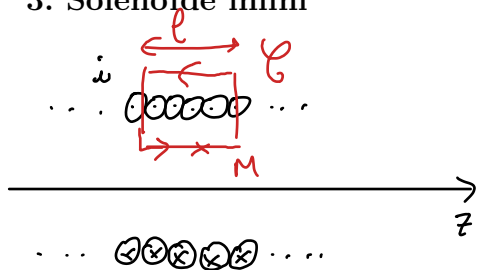
$C$ : cercle d'axe  $(Oz)$  passant par  $M$ :  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r)$

$$\begin{aligned} r \leq R & \\ I_{enc\acute{e}l\acute{e}} &= \pi r^2 j \\ B(r) &= \mu_0 \frac{j r}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \geq R & \\ I_{enc\acute{e}l\acute{e}} &= \pi R^2 j \\ B(r) &= \mu_0 \frac{R^2 j}{2r} \end{aligned}$$



3. Solénoïde infini



\* On admet  $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$  (idée: l'dc ne peuvent pas sortir)

\* Symétries: le plan passant par  $M$  orthogonal à  $(Oz)$  est un plan de symétrie  $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_z$

\* Invariances: la distribution est invariante par rotation et translation d'axe  $(Oz) \Rightarrow B(M) = B(r)$

Finalement:  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$

Théorème d'Ampère:  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc\acute{e}l\acute{e}}$

$$\Rightarrow B(r) \cdot l - \underbrace{B_{ext} \cdot l}_0 = \mu_0 \underbrace{n}_{\substack{\text{nb de spires} \\ \text{par unité de} \\ \text{longueur}}} l i$$

$\Rightarrow B_{int} = \mu_0 n i$  uniforme  $\circ$  l'intérieur du solénoïde.

Exercice: Montrer que l'inductance propre  $L_H$  d'une tranche de solénoïde de hauteur  $H$  s'écrit:

$$L_H = \mu_0 \pi a^2 n^2 H$$

$\underbrace{\mu_0}_{m^{-2}} \underbrace{\pi a^2}_{m^2} \underbrace{n^2}_{m^{-2}} \underbrace{H}_{m} = m^{-2} \cdot m^2 \cdot m^{-2} \cdot m = m^{-2}$

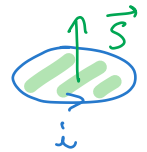
### III. Dipôle magnétostatique

$\vec{S}$  orienté par la règle de la main droite

#### 1. Moment magnétique

Les lignes de champ du champ magnétique créées à grande distance par un circuit  $C$  et par un aimant ont la même allure. On définit alors le moment magnétique associé à une boucle de courant plane :

$$\vec{M} = i\vec{S}$$

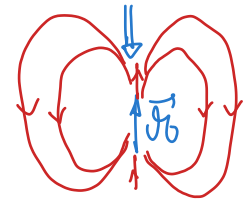


Pour une boucle de courant de rayon 3cm parcouru par un courant de 1 A, on a :

$$M = 1 * 3 * 9.10^{-4} = 3.10^{-3} A.m^2$$

Si on a une bobine plate de 500 spires :

$$M_{bobine} = NiS \Rightarrow M_{bobine} \simeq 1 A.m^2$$



Pour un petit aimant, on peut retenir l'ordre de grandeur de 1 A.m<sup>2</sup>.

#### Exercice :

1. Construire une grandeur ayant la dimension d'un moment magnétique à l'aide des constantes ci-dessous :

$$e = 1,6.10^{-19}C, m_e = 9,1.10^{-31}kg, \hbar = 1.10^{-34}J.s \rightarrow \mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$$

La valeur obtenue est - à une constante près - appelée magnéton de Bohr. Elle donne un ordre de grandeur du moment magnétique à l'échelle atomique.

2. Dans un aimant, les différents moments magnétiques atomiques s'ajoutent et on peut associer un moment magnétique global à l'aimant. En considérant un matériau comportant 10<sup>29</sup> atomes par unité de volume, estimer le moment magnétique d'un aimant de 10<sup>-7</sup>m<sup>3</sup> (1cm\*1cm\*1mm). On pourra retenir qu'un bon ordre de grandeur du moment magnétique d'un aimant (même si il varie beaucoup d'un aimant à un autre) est environ 1 A.m<sup>2</sup>.

$\underline{A.N.} : \mu_B = 10^{-23} A.m^2 \rightarrow M = 10^{-1} A.m^2$

#### 2. Champ magnétique créé par un dipôle

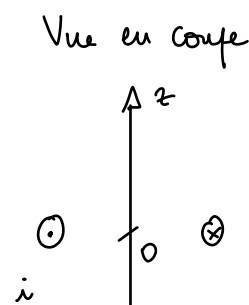
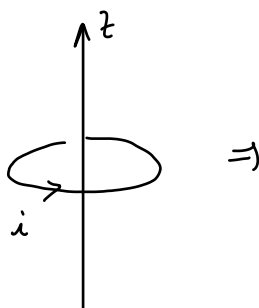
Par analogie avec le champ électrique créé par un dipôle électrique, on écrit :

$$B_r = \frac{2\mu_0 M \cos(\theta)}{4\pi r^3}; B_\theta = \frac{\mu_0 M \sin(\theta)}{4\pi r^3}; B_\varphi = 0$$

On peut également utiliser l'expression intrinsèque :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{M} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{M})$$

**Exercice :** En considérant que le circuit créant le champ est une boucle de courant, vérifier que les invariances / symétries sont en accord avec ces résultats.



\* Tous les plans contenant (Oz) sont des plans d'antisymétrie  
 $\Rightarrow$  si  $M \in (Oz) \Rightarrow \vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_z$   
 \*  $(Oxy) =$  plan de symétrie  $\Rightarrow \vec{B}(M)$  suivant  $\vec{u}_z$  pour  $M \in (Oxy)$

### 3. Action d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle

**Champ magnétique uniforme :** le dipôle  $\vec{M}$  est placé dans une zone où règne le champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}_{ext}$ . Il subit un couple :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}$$

qui tend à l'**orienter** le long des lignes de champ. L'énergie potentielle associée :

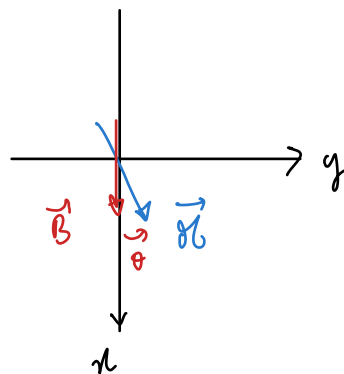
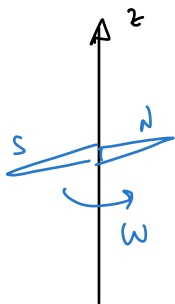
$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext}$$

Elle est minimale pour  $\vec{M}$  colinéaire à  $\vec{B}_{ext}$  et de même sens que  $\vec{B}_{ext}$ .

**Champ magnétique quasi-uniforme :** dans le cas d'un champ quasi-uniforme, le dipôle va également migrer vers les zones où le champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$  est le plus intense, sous l'action d'une force :

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}_{ext}$$

**Exercice :** on considère une boussole placée dans le champ magnétique terrestre. Montrer que si on écarte la boussole de sa position d'équilibre, elle va osciller avec une période propre  $T_0$  qui dépend de la valeur du champ magnétique terrestre.



$J$  = moment d'inertie de la boussole par rapport à  $\vec{z}$  ( $Oz$ )

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \vec{M} \wedge \vec{B} \\ &= -\mathcal{M} B \sin\theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

TMC en projection sur  $(Oz)$  :  $J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B \sin\theta$

Petits angles :  $\sin\theta \simeq \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M}B}{J} \theta = 0$

$\Rightarrow$  oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{M}B}{J}}$

$\Rightarrow$  période des oscillations :  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}}$