

Électromagnétisme - TD2 - Magnétostatique

Exercice 1 - Câble coaxial

On modélise un câble coaxial par deux cylindres conducteurs parfaits, infiniment longs, de même axe (Oz), de sections circulaires. Le premier, de rayon R_1 est appelé âme et le second de rayon $R_2 > R_1$ est la gaine. L'espace entre l'âme et la gaine est rempli d'un diélectrique non magnétique, homogène et isotrope que l'on assimilera au vide. On considère que l'âme véhicule une intensité $I_1 = I$ tandis que la gaine véhicule l'intensité opposée $I_2 = -I$.

1. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ en un point M situé entre l'âme et la gaine : $R_1 < r < R_2$.
2. On admet que l'énergie magnétique dans une section de hauteur H de câble a pour expressions :

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} L_H I^2 = \iiint_D \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

En déduire l'expression de l'inductance linéique du câble.

3. Faire l'application numérique pour $R_1 = 1\text{mm}$, $R_2 = 2,5\text{mm}$.

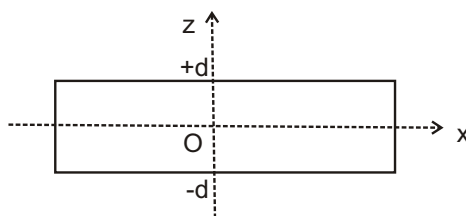
Exercice 2 - Effet Meissner dans une plaque supraconductrice

Dans un matériau supraconducteur, il existe une densité volumique de courant $\vec{j}$ liée au champ magnétique $\vec{B}$ par la relation :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{j}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}$$

(appelée équation de London) où λ est une constante positive, caractéristique du matériau.

1. Quelle est la dimension de λ ?
2. Déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite en tout point intérieur au matériau par le champ magnétique $\vec{B}$. On donne : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
3. On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur $2d$, dont les faces sont de dimensions très grandes devant d pour pouvoir négliger les effets de bord (voir figure). Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de plaque est uniforme, statique et égal à $\vec{B}_o = B_o \vec{u}_x$. Déterminer le champ magnétique $\vec{B} = B(z) \vec{u}_x$ à l'intérieur de la plaque en supposant que $\vec{B}(\pm d) = \vec{B}_o$. En déduire le vecteur densité de courant $\vec{j}$ à l'intérieur de la plaque.



4. Tracer les graphes des composantes non nulles de $\vec{B}$ et $\vec{j}$ pour $\lambda = 17\text{ nm}$ et $d = 5\lambda$.

Exercice 3 - Compression magnétique d'un plasma

On considère une enceinte cylindrique de rayon R_o et d'axe (Oz) contenant un plasma (gaz ionisé, globalement neutre) dans la partie $r < R_1$ et vide dans la zone comprise entre R_o et R_1 (la pression est nulle dans cette zone).

Un courant électrique d'intensité totale I circule parallèlement à (Oz) dans la zone correspondant à $R_2 < r < R_1$ avec une densité volumique de courant $\vec{j}$ uniforme.

1. Déterminer le champ magnétique pour $r < R_o$.
2. Exprimer la force de Laplace s'exerçant sur un volume élémentaire $d\tau$ compris entre les cylindres de rayon R_2 et R_1 .
3. On néglige la gravitation et on appelle p la pression en un point du plasma. On peut montrer en supposant $R_2 \simeq R_1$ que :

$$p(r < R_2) \simeq \frac{B^2(R_1)}{2\mu_o}$$

Vérifier que p a bien la dimension d'une pression et établir son expression.

4. On assimile le plasma à un gaz parfait constitué d'ions et d'électrons en concentrations égales (notée N_V). On considère que la température T des électrons est la même que celle des ions. Exprimer puis calculer cette température.

On donne : $I = 1,0 \cdot 10^6$ A, $R_1 = 10$ cm et $N_V = 1,0 \cdot 10^{21}$ m⁻³.

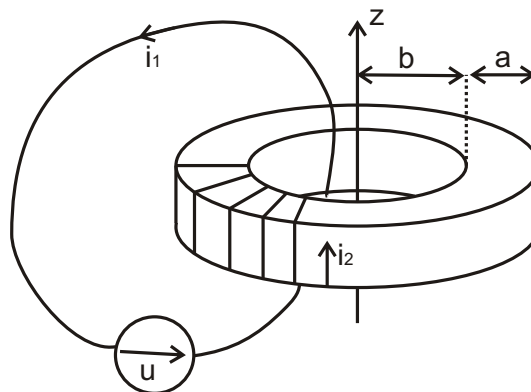
Exercice 4 - Oscillations d'une boussole

Un boussole est animée de petites oscillations dues à un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant, orthogonal à son axe de rotation. Suite à une modification de $\vec{B}$ la pulsation de ses oscillations est multipliée par 5.

Comment a été modifié $\vec{B}$?

Exercice 5 - Calculs de champ magnétique et induction

1. Une ligne haute tension transporte un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz et de valeur efficace $I_{\text{eff}} = 1$ kA. On approche une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30$ cm à une distance $d = 2$ cm du fil. Cette bobine, d'inductance et de résistance négligeable, est fermée sur une ampoule qui s'allume si la tension efficace à ses bornes est supérieure à 1,5 V. Déterminer le nombre de spires nécessaires pour que l'ampoule s'allume.
2. N spires sont régulièrement bobinées sur un tore de section carrée de côté a , d'axe (Oz) et de rayon intérieur b . Cette bobine a une résistance ohmique totale R_2 , on appelle i_2 le courant dans le tore. Une spire parcourue par un courant i_1 enlace le tore.



Exprimer le champ magnétique créé par la bobine torique en tout point. En déduire l'inductance propre L_2 de la bobine et l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

3. Soit deux spires, la première de rayon R et d'axe (Oz) et la seconde de même axe et de rayon a très petit devant R . La petite spire est placée au point O et la seconde en $z = d$. Déterminer l'expression du coefficient d'inductance mutuelle M entre les deux spires.

Exercice 6 - Modèle de Drude ¹

Dans une approche classique, un milieu est conducteur s'il contient des charges mobiles. Ainsi, des électrons, de masse m et de charge $-e$, peu liés aux noyaux, peuvent se déplacer dans le réseau cristallin : ce sont les électrons de conduction. Lors de l'application d'un champ électrique $\vec{E}$ au matériau, les électrons sont soumis à la force de Lorentz correspondante qui entraîne leur déplacement à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au réseau cristallin. Dans le modèle de Drude, les électrons sont également soumis à une force de frottement fluide exercée par le réseau cristallin. Ainsi, en négligeant l'effet du poids et de la force de Lorentz magnétique, l'évolution d'un électron de conduction est décrite par l'équation :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

1. Indiquer la signification de chacun des trois termes de cette équation.
2. Montrer qu'en régime permanent la vitesse $\vec{v}$ des électrons est proportionnelle au champ $\vec{E}$. On définit ainsi la mobilité μ_e en posant :

$$\vec{v} = \mu_e \vec{E}$$

On note n_e la densité volumique d'électrons de conduction dans le matériau.

3. Donner l'expression de la conductivité γ du matériau en fonction de n_e , τ , m et e .

Quand un électron de conduction est libéré par les atomes de silicium pour se déplacer dans le réseau cristallin, son départ crée un trou, ou défaut électronique, de charge $+e$, qui peut lui aussi se déplacer de proche en proche entre atomes voisins. La mobilité d'un trou est notée μ_p . Pour du silicium pur, la conductivité intrinsèque est assurée par les électrons de conduction et par les trous, qui ont ici même densité $n_e = n_p$. Pour simplifier, on admet que la masse des trous est identique à celle des électrons.

4. Déterminer la densité électronique n_e à partir des données ci-dessous, à la température de 25°C. En déduire la proportion d'atomes de silicium qui libèrent un électron de conduction.

Données sur le silicium (à 20 °C)

Structure électronique	[Ne]3s ² 3p ²
Masse molaire	$M = 28,1 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse volumique	$\rho = 2,33 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Mobilité des électrons	$ \mu_e = 1,5 \times 10^{-1} \text{ m}^2\cdot\text{V}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
Mobilité des trous	$\mu_p = 4,5 \times 10^{-2} \text{ m}^2\cdot\text{V}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
Conductivité intrinsèque	$\gamma = 4,3 \times 10^{-4} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$

Exercice 7 - Système à deux bobines ²

1. Comment peut-on, à partir de deux spires identiques planes, créer un champ magnétique radial sortant dans un plan ? Faire un schéma du dispositif en supposant que ce plan est le plan $z = 0$. Dessiner des lignes de champ en faisant une coupe du dispositif dans le plan (xOz) .
2. Quel est le signe de $\frac{\partial B_z}{\partial z}(r, z = 0)$ au voisinage de $r = 0$ et pour $r \rightarrow \infty$.

1. D'après Centrale PC 2022

2. D'après Centrale PC 2023

Exercice 8 - Disdromètre à impact³

On considère une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D , tombent avec la même vitesse $\vec{v} = v_\ell \vec{u}_z$ ($\vec{u}_z$ désignant la verticale descendante), et sont réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N .

On suppose que la vitesse limite s'écrit :

$$v_\ell = K\sqrt{D}$$

Le détecteur (disdromètre) a une surface S perpendiculaire à $\vec{u}_z$, la durée de l'impact d'une goutte sur le détecteur est :

$$\tau = \xi \frac{D}{v_\ell(D)}$$

1. Exprimer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant la durée τ d'un impact, en fonction de N , S , D et de ξ . En déduire l'expression de la surface maximale S_{max} du capteur du disdromètre permettant d'éviter des chevauchements du signal dus à deux impacts successifs.
2. Dans une averse, on trouve en fait plusieurs tailles de gouttes. La distribution des tailles de gouttes est caractérisée par la fonction $n(D)$, telle que le nombre de gouttes de pluie par unité de volume, de diamètre compris entre D et $D + dD$ s'écrit :

$$dN = n(D)dD$$

Une distribution empirique très utilisée est celle de Marshall et Palmer :

$$n(D) = n_o \exp\left(-\frac{D}{D_o}\right)$$

On considère une averse contenant toutes les tailles de gouttes, répondant à la distribution de Marshall et Palmer. Montrer que D_o représente le diamètre moyen des gouttes. On donne :

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$$

3. D'après CCINP MPI 2023