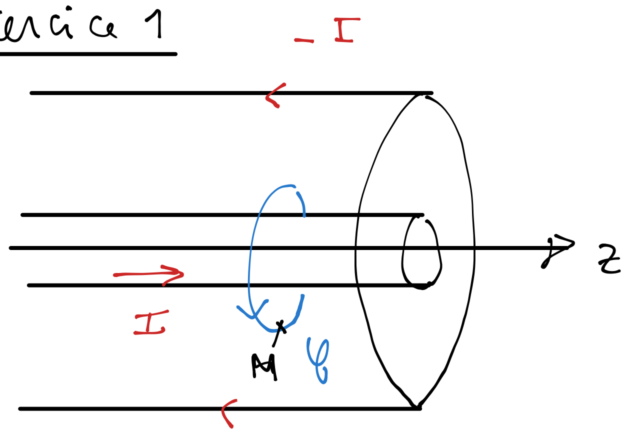
Electromagnétisme _ TD 2 _ Magnétostatique

Exercice 1



1) <u>Symétrie</u> : le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de courant donc $\vec{B}(M) = B(M)\,\vec{u_\theta}$

<u>Invariance</u> : la distribution est invariante par rotation et translation d'axe (Oz)

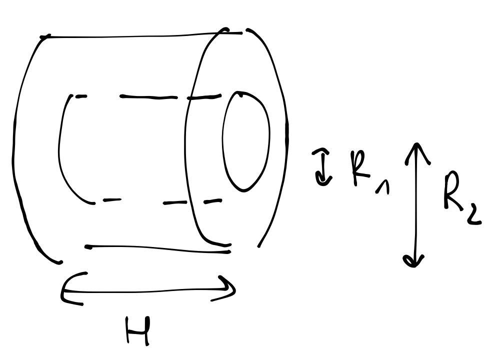
$$\Rightarrow \quad B(M) = B(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$$

Finalement : $\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u_\theta}}$

Théorème d'Ampère : $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enlacé}$

On choisit $\mathcal{C}$: cercle d'axe (Oz) de rayon r avec $R_1 < r < R_2$

$$\Rightarrow \quad 2\pi r\, B(r) = \mu_0 I \quad \text{soit} \quad \boxed{B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}}$$

2) 

$\mathcal{D}$: espace entre les deux cylindre de hauteur H de rayons R_1 et R_2.

$$\mathcal{E}_{mag} = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{H} \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{E}_{mag} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} H \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\,dr \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{mag} = \frac{\mu_0 I^2 H}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

D'autre part : $\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} L_H I^2 \quad \Rightarrow \quad L_H = \frac{\mu_0 H}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

On en déduit l'inductance linéique :

$$\boxed{\frac{L_H}{H} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Rq : on retrouve l'unité de μ_0 ($H.m^{-1}$)

3) A.N : $\frac{L_H}{H} = \frac{4\pi . 10^{-7}}{2\pi} \ln(2,5) = 1,8 . 10^{-7}$ $H.m^{-1}$

$\Rightarrow$ cette valeur reste faible par rapport aux valeurs usuelles des inductances utilisées en TP même pour d'assez grandes longueurs de câble.

Exercice 2

1) $[\lambda^2] = \frac{[B]\, m}{[\mu_0][j]}$ car $[\vec{rot}\,\vec{j}] = \frac{[j]}{m}$

On utilise l'équation de Maxwell Ampère en magnétostatique :

$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \frac{[B]}{m} = [\mu_0][j]$

On a ainsi : $[\lambda]^2 = m^2$ soit λ : longueur.

2) $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{B}) = \mu_0 \vec{rot}\,\vec{j}$

Soit $\vec{grad}(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \vec{\Delta}\vec{B} = -\frac{1}{\lambda^2}\vec{B}$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ (Maxwell - Flux) $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{\lambda^2}\vec{B} = \vec{0}}$

3) On résout l'équation précédente pour $\vec{B} = B(z)\,\vec{e_x}$

$\Rightarrow B''(z) - \frac{1}{\lambda^2}B(z) = 0 \Rightarrow B(z) = A\,ch\left(\frac{z}{\lambda}\right) + B\,sh\left(\frac{z}{\lambda}\right)$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} A\,ch\left(\frac{d}{\lambda}\right) + B\,sh\left(\frac{d}{\lambda}\right) = B_0 \\ A\,ch\left(-\frac{d}{\lambda}\right) + B\,sh\left(-\frac{d}{\lambda}\right) = B_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\,ch\left(\frac{d}{\lambda}\right) + B\,sh\left(\frac{d}{\lambda}\right) = B_0 \\ A\,ch\left(\frac{d}{\lambda}\right) - B\,sh\left(\frac{d}{\lambda}\right) = B_0 \end{cases}$$

Ainsi :

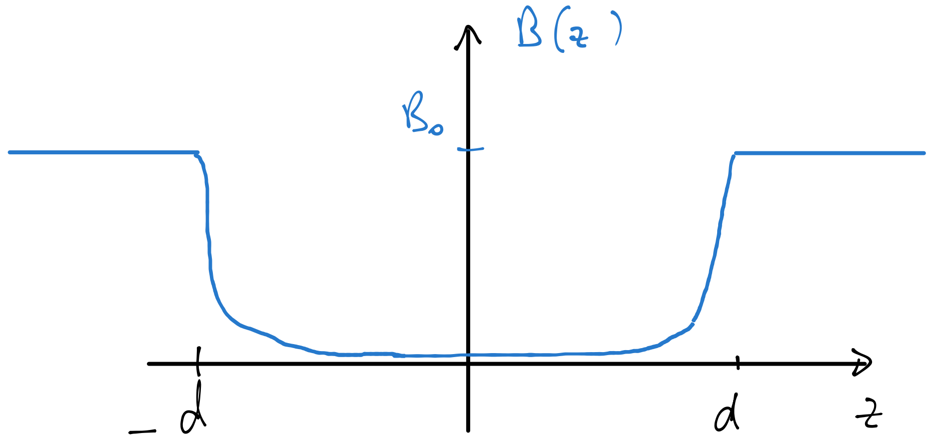
$$A = \frac{B_0}{ch\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \quad \text{et} \quad B = 0 \Rightarrow \boxed{B(z) = B_0 \frac{ch\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{ch\left(\frac{d}{\lambda}\right)}}$$

On exprime ensuite $\vec{j}$ grâce à Maxwell - Ampère :

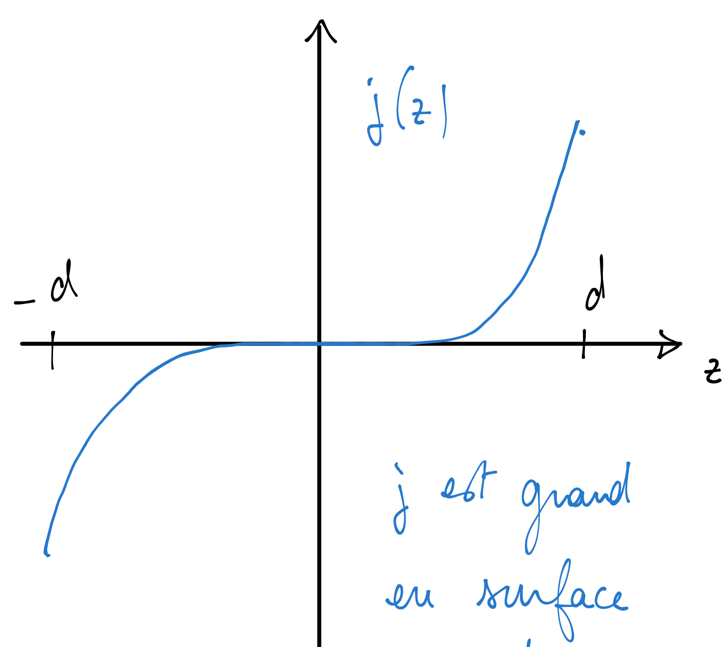
$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \frac{sh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{ch\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{u_y}}$$

4)

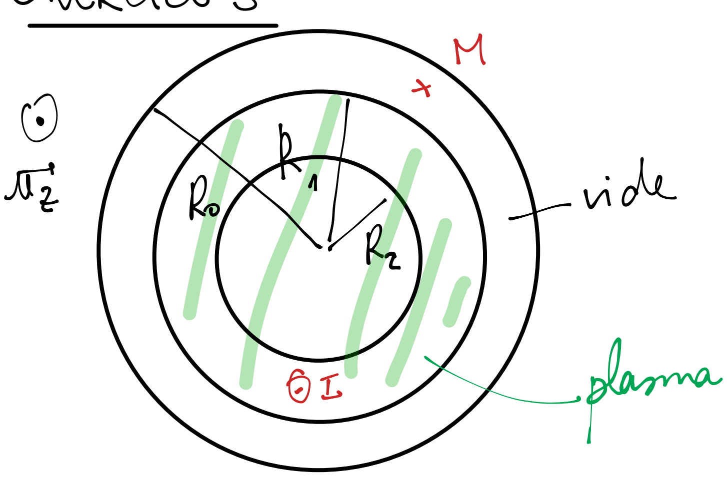


Le champ magnétique est nul dans le matériau ⇒ c'est l'effet MEISSNER



j est grand en surface = courants MEISSNER

EXERCICE 3



1) Invariances : la distribution est invariante par rotation et translation d'axe (Oz)

$$\rightarrow B(M) = B(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$$

Symétrie : le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution

$$\rightarrow \vec{B}(M) = B(M)\,\vec{u_\theta}$$

Finalement : $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u_\theta}$

$\mathcal{C}$ = cercle d'axe (Oz), de rayon r

Théorème d'Ampère : $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé}$

$$\Rightarrow \quad 2\pi r\, B(r) = \mu_0 I_{enlacé}$$

Pour $r < R_2$ $\quad I_{enlacé} = 0 \quad \Rightarrow B(r) = 0$

Pour $R_1 < r < R_0$ $\quad I_{enlacé} = I \quad \Rightarrow B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Dans la zone $R_2 \leq r \leq R_1$, on a $j = \dfrac{I}{\pi R_1^2 - \pi R_2^2}$ ← surface entre les deux cercles

$$\Rightarrow \quad I_{enlacé} = \int_{R_2}^{r}\int_0^{2\pi} j\, r'\,dr'\,d\theta$$

$$= \frac{r^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}\, I \quad \Rightarrow \quad \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\frac{r^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}}$$

On vérifie que $B(r)$ est bien continue en $r = R_1$ et $r = R_2$.

2) La force de Laplace subie par un élément de volume $d\tau$:

$$\vec{dF}_{Lap} = \vec{j} \wedge \vec{B}\, d\tau$$

Elle est non nulle dans la zone $R_2 \leq r \leq R_1$ et :

$$\vec{dF}_{Lap} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 r}\,\frac{r^2 - R_2^2}{(R_1^2 - R_2^2)^2}\, d\tau\; \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \quad \vec{dF}_{Lap} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 r}\,\frac{r^2 - R_2^2}{(R_1^2 - R_2^2)^2}\, d\tau\; \vec{u}_r$$

3) Rq : si on considère un volume $d\tau$ de plasma : il est soumis à $\vec{dF}_{Lap}$ et à $-\vec{\mathrm{grad}}\,P\, d\tau$ résultante des forces de pression

$\Rightarrow d\vec{F}_{Lap} - \vec{\text{grad}}P \, d\tau = \vec{0}$ à l'équilibre mécanique.

↳ on peut en déduire l'expression de $p(r)$

<u>Dimensions :</u> • Thermo $\delta W = -P dV$ travail des forces de pression

$$\Rightarrow [P] = \frac{\text{énergie}}{\text{volume}} \quad \text{en } J.m^{-3}$$

• Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} . d\vec{l} = \mu_0 I$

$$\Rightarrow \frac{[B]}{[\mu_0]} = \frac{\text{courant}}{\text{longueur}}$$

On a alors : $\dfrac{[B]^2}{[\mu_0]} = \dfrac{\text{courant} \times \text{champ magnétique}}{\text{longueur}}$

Force de Laplace : $d\vec{F} = i \, d\vec{l} \wedge \vec{B}$

$$\Rightarrow \left[\frac{B^2}{\mu_0}\right] = \frac{\text{force}}{(\text{longueur})^2} = \text{pression} = \frac{\text{énergie}}{\text{volume}}$$

4) On utilise la loi des gaz parfaits : $PV = nRT$

ou $PV = N k_B T$

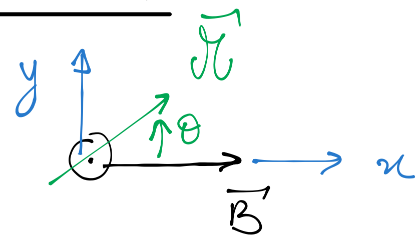
$(N = n \mathcal{N}_A)$

Ici il y a autant d'électrons que d'ions

$$\Rightarrow P = 2 N_V k_B T \Rightarrow T = \frac{\mu_0 I^2}{16 \pi^2 R_1^2 N_V k_B}$$

<u>A.N</u> : $T = 5,7.10^7$ K $\Rightarrow$ on peut atteindre de fortes températures.

EXERCICE 4



Le dipôle est soumis à $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$

$\Rightarrow \quad \vec{\Gamma} = -\mathcal{M} B \sin\theta \, \vec{u}_z$

Loi du moment cinétique en projection sur (Oz) : $J\ddot{\theta} = -\mathcal{M} B \sin\theta$

Dans le cas des mouvements : $\sin\theta \simeq \theta$

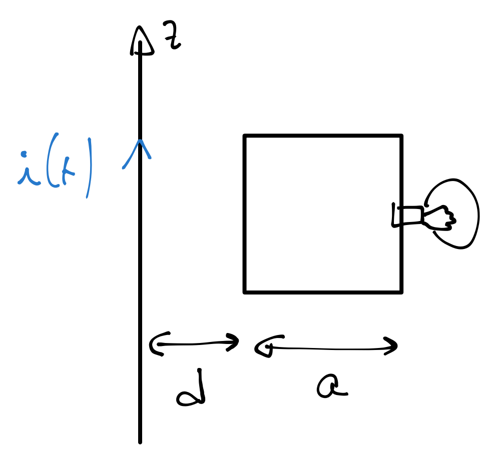
$$\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M} B}{J}\theta = 0$$

$\Rightarrow$ le dipôle oscille à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{M} B}{J}}$

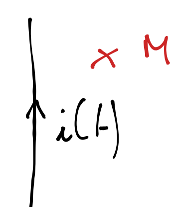
Si ω_0 est multipliée par 5 cela signifie que le champ magnétique B a été multiplié par 25.

Exercice 5

1)



Champ créé par le fil :



$\Rightarrow$ On montre à l'aide du théorème d'Ampère que $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\vec{u}_\theta$

On calcule le flux de $\vec{B}$ à travers une spire carrée :

$$\phi_1 = \int_0^a \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\, dr\, dz = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Le flux à travers la bobine de N spires vaut donc :

$$\phi_N = N\phi_1 = \frac{\mu_0 N}{2\pi} a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \underbrace{I_0 \cos(2\pi f t)}_{i(t)}$$

avec $I_{eff} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$

La fem induite dans la bobine :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \text{ (loi de Faraday)} \Rightarrow e = \mu_0 N f a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) I_0 \sin(2\pi f t)$$

$\Rightarrow$ La tension efficace aux bornes de l'ampoule :

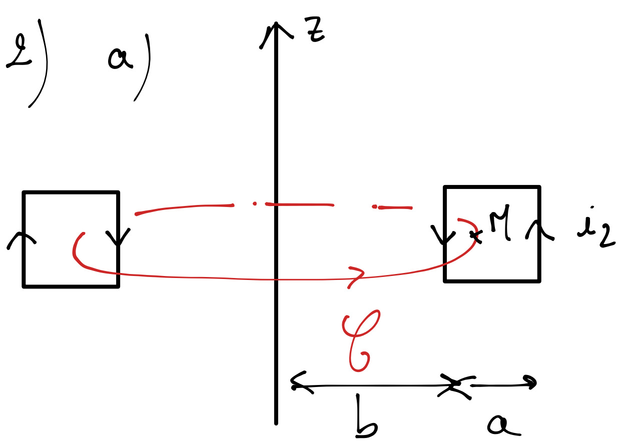
$$E_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mu_0\, N f\, a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) I_0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{eff} = \mu_0\, N f\, a \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) I_{eff}}$$

On cherche N pour avoir $E_{eff} = 1{,}5\,V$:

A.N : $N = \dfrac{1{,}5}{4\pi.10^{-7} . 50 . 0{,}3 . \ln(16) . 1.10^{3}}$ soit 29 spires.

2) a)



Symétrie : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B}_2(M) = B_2(M)\,\vec{u}_\theta$

Invariances : la distribution est invariante par rotation d'axe (Oz) (si on suppose N grand)

$\Rightarrow B_2(M) = B_2(r, \cancel{\theta}, z)$ (on doit avoir $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$)

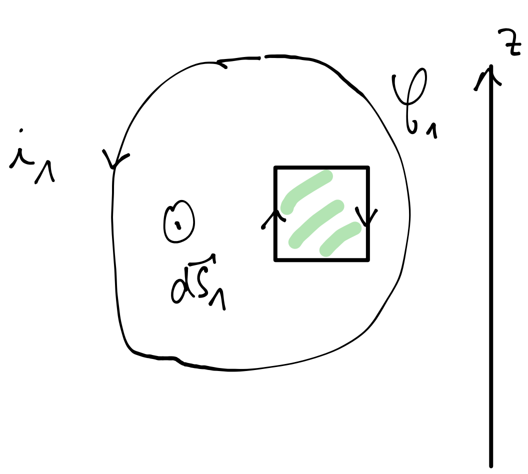
$\mathcal{C}$: cercle de rayon r, d'axe (Oz)

Théorème d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé} \Rightarrow 2\pi r\, B_2(r,z) = \mu_0 I_{enlacé}$

1er cas : $r < b$ $\quad I_{enlacé} = 0 \Rightarrow B_2 = 0$

2e cas : $b < r < b+a$ $\quad I_{enlacé} = -N i_2 \Rightarrow B_2(r,z) = -\dfrac{\mu_0 N i_2}{2\pi r}$

3e cas : $r > b+a$: $I_{enlacé} = -N i_2 + N i_2 = 0 \Rightarrow B_2 = 0$



Le flux de $\vec{B}_2$ à travers $\mathcal{C}_1$:

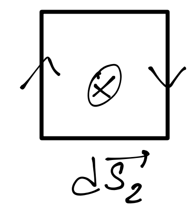
$$\Phi_{2/1} = \iint \vec{B}_2 . \vec{dS}_1 = \int_0^a \int_b^{b+a} -\frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r}\, dr\, dz$$

$$\Rightarrow \Phi_{2/1} = -\mu_0 \frac{N}{2\pi} a \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) i_2$$

M coefficient d'inductance mutuelle entre la spire et le tore.

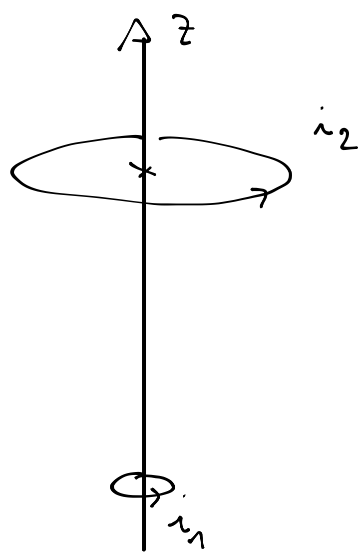
Le flux propre de $\vec{B_2}$ à travers le tore :

$$\phi_{propre} = N \iint \vec{B_2} \cdot \vec{dS_2}$$



$$\Rightarrow \phi_{propre} = \underbrace{N \mu_0 \frac{N}{2\pi} a \ln\left(\frac{b+a}{b}\right)}_{L_2 \text{ inductance propre du tore.}} i_2$$

3)

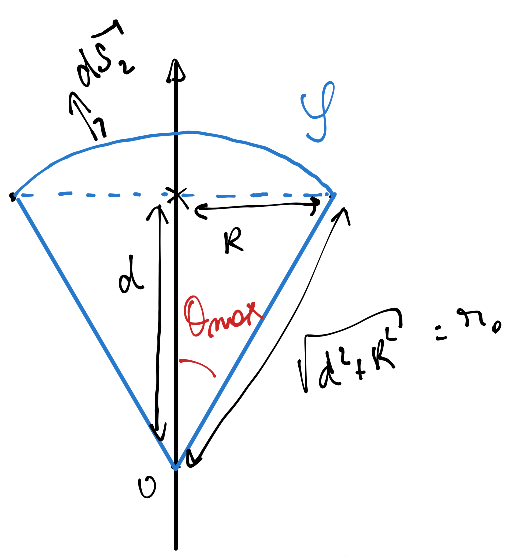


idée : petite spire assimilée à un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}} = \pi a^2 \vec{u_z}$ qui crée

$$\vec{B_1} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} \left(2\cos\theta \, \vec{u_r} + \sin\theta \, \vec{u_\theta}\right)$$

en coordonnées sphériques.

$\Rightarrow$ Pour calculer le flux de $\vec{B_1}$ à travers $\mathcal{C}_2$ on considère une calotte sphérique de rayon $\underbrace{\sqrt{d^2+R^2}}_{r_0}$ s'appuyant sur $\mathcal{C}_2$



$$\vec{B_1} \cdot \vec{dS_2} = \vec{B_1} \cdot r_0^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{u_r}$$

$$= \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r_0^3} r_0^2 \sin\theta \cdot 2\cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

On intègre :

$$\phi_{1/2} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta_{max}} \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r_0} \left(2\cos\theta \sin\theta\right) d\theta \, d\varphi$$

$$\Rightarrow \phi_{1/2} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2 r_0} \sin^2\theta_{max} \quad \text{avec} \quad \sin\theta_{max} = \frac{R}{r_0}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_{1/2} = \underbrace{\frac{\mu_0 \, \pi a^2 \, R^2}{2 \, (d^2 + R^2)^{3/2}}}_{M} \, i_1$$