

## Électromagnétisme

### Chapitre 6 - Équations de Maxwell

On se place dans le cas où la densité volumique de charges  $\rho(M, t)$  et la densité volumique de courant  $\vec{j}(M, t)$  ne sont plus constantes au cours du temps. Ce sont alors les sources d'un champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$  défini par son action sur une charge ponctuelle :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \left| \begin{array}{l} \cdot \vec{F} \text{ n'est a priori pas conservatoire} \\ \cdot \text{ la partie magnétique ne travaille pas (} \perp \vec{v} \text{)} \end{array} \right.$$

$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$  soit  $\mathcal{P} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$

Les équations de Maxwell sont des équations **locales**.

Elles font le lien entre  $(\vec{j}(M, t), \rho(M, t))$ ,  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  Rq : le principe de Curie est toujours valable, les conséquences présentent au moins les mêmes symétries que les causes.

sources du champ

## I. Équations de Maxwell

Milieu considéré : vide en dehors des sources. On considèrera dans les chapitres suivants les cas du plasma (gaz dilué) et des matériaux conducteurs. Ces équations ont été proposées par James Maxwell en 1861.

### 1. Équations de Maxwell en régime variable

Maxwell - Gauss  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Maxwell | Thomson Flux  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Maxwell - Faraday  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell - Ampère  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

#### Commentaires :

- Ce sont des équations **linéaires** : théorème de superposition.
- (M.G.) et (M.A.) lient les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  aux sources.
- (M.F.) et (M.A.) montrent un couplage entre les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  : on parle de champ **électromagnétique** en régime variable.

D'après Maxwell - Ampère :  $\left[ \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right] = [j]$

On appelle courant de déplacement :

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2. Lien avec nos connaissances

— La divergence d'un rotationnel est nulle :

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{B})) = \text{div} \left( \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{j} + \text{div} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Soit, en utilisant l'équation de Maxwell Gauss :

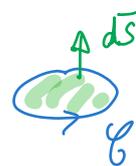
$$(M.G) \quad \epsilon_0 \text{div} \vec{E} = \rho \quad \Rightarrow \quad \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$\left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \right)$   
variables indépendantes

On retrouve l'équation locale de conservation de la charge.

— Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday :

Stokes  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} (\text{rot} \vec{E}) \cdot d\vec{S}$



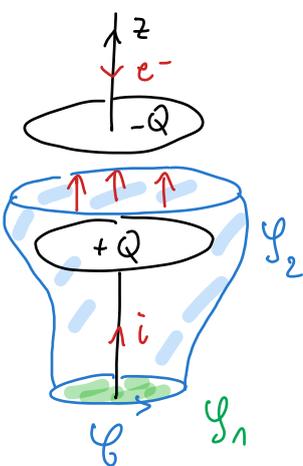
$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Pour  $\mathcal{I}$  rigide, on obtient :  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$  avec  $\phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

loi des mailles en statique  $\Rightarrow$  tout se passe comme si on avait ajouté un générateur de fem  $e = -\frac{d\phi}{dt}$

— Théorème d'Ampère généralisé : si on introduit le courant de déplacement  $\vec{j}_D$  on peut utiliser un théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique créé par un champ électrique variable. (voir application ci-après).

3. Exemple : condensateur plan



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$\mathcal{S}_1 \Rightarrow \vec{j}_0 = 0, \quad \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = i$   
hypothèse  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$

$\mathcal{S}_2 \Rightarrow \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{j}_0 = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dot{\sigma} \vec{u}_z$

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = \dot{\sigma} S = \frac{d(Q)}{dt}$$

avec  $Q = \sigma S$  charge de l'armature

On obtient alors  $i = \frac{dQ}{dt}$  conservation de la charge.

## II. Des équations de Maxwell aux équations de propagation

idée : un champ  $E$  variable crée un champ  $B$  variable qui crée un champ  $E$  ...

### 1. Équations de propagation

On se place dans une zone vide de charges :  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = \vec{0}$ . On utilise la relation :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \overrightarrow{\Delta}\vec{A} \rightarrow \text{En coord. cartésiennes}$$

$$\overrightarrow{\Delta}\vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$$

On applique l'opérateur rotationnel à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \overrightarrow{\Delta}\vec{E} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

↻  
commutent

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E}) &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \rho \text{ et } \vec{j} \text{ sont nuls} \end{array} \right.$$

Et on peut inverser les dérivées :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}))$$

Soit, finalement :

$$-\overrightarrow{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Que l'on écrit sous la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

En posant :

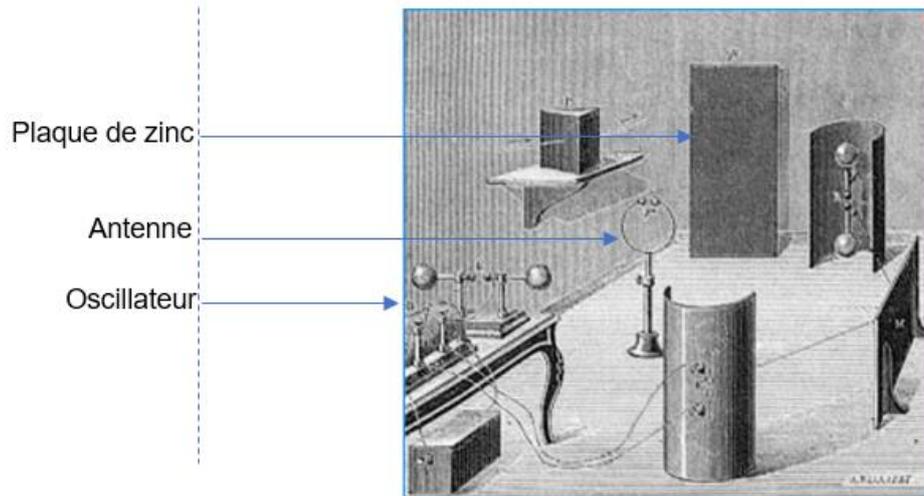
$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Il s'agit d'une équation de propagation appelée équation de d'Alembert. Les expériences de Heinrich Hertz (1885) ont mis en évidence la production, la propagation et la réception d'ondes électromagnétiques et ont ainsi permis une validation expérimentale des équations de Maxwell.

$$\text{Rq : } \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \dots$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

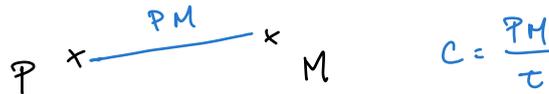
En 1888, Hertz proposa un dispositif permettant de démontrer le caractère ondulatoire des phénomènes électromagnétiques en utilisant un oscillateur (à l'origine de l'émission d'une onde électromagnétique supposée quasi-sinusoidale et de fréquence  $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ), une antenne de réception et des plaques de zinc (cf. document 11).



**Document 11** – D'après « Construction de la preuve en physique » de Dominique Pestre

FIGURE 1 – Expérience de Hertz décrite dans le sujet du CAPES de Physique-Chimie 2020.

2. ARQS



Lorsque les sources ( $\rho(P, t), \vec{j}(P, t)$ ) du champ électromagnétique varient, l'effet en un point  $M$  se fait ressentir avec un décalage :

$$\tau = \frac{PM}{c}$$

qui correspond au temps de propagation de l'information "la source a changé". L'approximation des régimes quasistationnaires consiste à négliger ce temps de propagation devant un temps caractéristique d'évolution du champ électromagnétique :

$\tau \ll T \rightarrow PM \ll \textcircled{cT} \rightarrow \text{longueur d'onde } \lambda$

*(Handwritten notes: "période du signal" above T, "longueur d'onde" above lambda)*

Dans l'ARQS, le courant de déplacement est considéré comme négligeable devant le vecteur densité de courant  $\vec{j}$ .

$\Rightarrow$  les équations de Maxwell dans l'ARQS :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\hookrightarrow$  induction

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

$\vec{B}$  se calcule comme en statique

### III. Aspects énergétiques

#### 1. Puissance cédée à la matière

Considérons un matériau conducteur : les porteurs de charges sont mis en mouvement sous l'effet du champ électrique  $\vec{E}$  et acquièrent ainsi une vitesse d'ensemble  $\vec{v}$ . La puissance de la force électrostatique s'exerçant sur un porteur de charge  $q$  s'écrit :

$$\mathcal{P} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

On considère à présent un volume  $d\tau$  de conducteur. Sa charge totale se déplaçant à  $\vec{v}$  :

$$dq_m = \rho_m d\tau$$

La puissance reçue par un volume  $d\tau$  de conducteur s'écrit ainsi :

$$d\mathcal{P} = \rho_m d\tau \vec{E} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow d\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

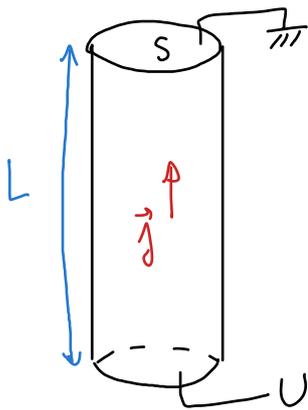
\* La **puissance volumique** cédée par l'onde électromagnétique à un matériau conducteur parcouru par le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  s'écrit :

$$* \quad p = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{en } \text{W} \cdot \text{m}^{-3}$$

On peut vérifier que le produit  $j \cdot E$  a bien la dimension d'une puissance volumique.

$$[\vec{j} \cdot \vec{E}] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$$

#### Application : cylindre conducteur



$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \uparrow = \gamma E^2$$

$$\vec{j} \text{ uniforme} \Rightarrow \vec{E} \text{ uniforme} \Rightarrow E = \frac{U}{L}$$

$$\text{soit } \uparrow = \gamma \frac{U^2}{L^2}$$

On intègre sur le volume du cylindre :

$$\mathcal{P} = L \cdot S \cdot \gamma \frac{U^2}{L^2}$$

$$\text{Soit } \mathcal{P} = \frac{\gamma S}{L} U^2 = \frac{U^2}{R} \quad \text{avec} \quad R = \frac{L}{\gamma S}$$

## 2. Bilan énergétique

Nous allons introduire deux grandeurs nécessaires pour décrire les aspects énergétiques en partant de nos connaissances.

— Dans le cas d'un condensateur, dans le cadre de l'ARQS, on a écrit :

$$\mathcal{E}_{elec} = \frac{1}{2}CU^2$$

Si on exploite les informations supplémentaires vues cette année :

$$E = \frac{U}{d} \Rightarrow U^2 = d^2 \cdot E^2$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

On peut écrire :

$$\mathcal{E}_{elec} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} d^2 \cdot E^2 \Rightarrow \mathcal{E}_{elec} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} S \cdot d$$

On introduit alors la densité volumique en énergie électrique :

$$u_{elec} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

— Dans le cas d'un solénoïde d'inductance propre  $L$ , on a écrit :

$$\mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$$

En prenant le cas d'une section  $H$  de solénoïde de rayon  $a$  assimilé à un solénoïde infini, on a établi :

$$B = \mu_0 n i \Rightarrow i^2 = \frac{B^2}{\mu_0^2 n^2}$$

$$L_H = \mu_0 \pi a^2 n^2 H$$

On a alors :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \mu_0 \pi a^2 n^2 H \frac{B^2}{\mu_0^2 n^2} \Rightarrow E_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi a^2 H$$

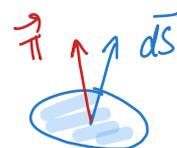
On introduit alors la densité volumique en énergie magnétique :

$$u_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

— En thermodynamique, on a parlé du transfert thermique effectué par rayonnement. On le décrit en général en donnant une puissance surfacique : *la puissance du rayonnement solaire peut atteindre 900 W/m<sup>2</sup> en été ....* Pour maximiser la réception d'un panneau solaire on va également le placer perpendiculairement aux rayons. On introduit un vecteur  $\vec{\Pi}$  appelé **vecteur de Poynting** tel que :

$$\vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

représente la puissance traversant la surface  $dS$ .



**Bilan :**

— On introduit la densité volumique en énergie électromagnétique :

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

— Le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

tel que :

$$\vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

représente la puissance traversant la surface  $dS$ . En optique, les rayons lumineux sont des lignes de champ du vecteur de Poynting.

**3. Équation de Poynting**

On peut alors écrire l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique, appelée **équation de Poynting** :

$$\operatorname{div}(\vec{\pi}) + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Démo :

énergie dans  $\mathcal{D}$  à  $t+dt$  = énergie dans  $\mathcal{D}$  à  $t$  - énergie perdue à travers  $\mathcal{S}$  pendant  $dt$  - énergie cédée à la matière dans  $\mathcal{D}$  pendant  $dt$



$$\iiint_{\mathcal{D}} u(t+dt) d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} u(t) d\tau - \oint_{\mathcal{S}} \vec{\pi} \cdot d\vec{S} dt - \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

$$\Rightarrow \iiint_{\mathcal{D}} \left( u(t+dt) - u(t) + \operatorname{div} \vec{\pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau = 0$$

**Quelques dates importantes :**

- Champ électrostatique - 1785 : travaux de Coulomb, introduction du potentiel par Poisson en 1811
- Magnétostatique : Gauss mesure le champ magnétique terrestre en 1832, travaux de Biot et Savart, Ampère en 1830.
- 1831 : Faraday étudie l'influence d'un champ magnétique variable sur un circuit.
- 1872 : mise en forme des équations de Maxwell caractérisant le champ électromagnétique.
- 1888 : expériences de Hertz : mise en évidence d'ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière : fondement expérimental à la théorie de Maxwell.