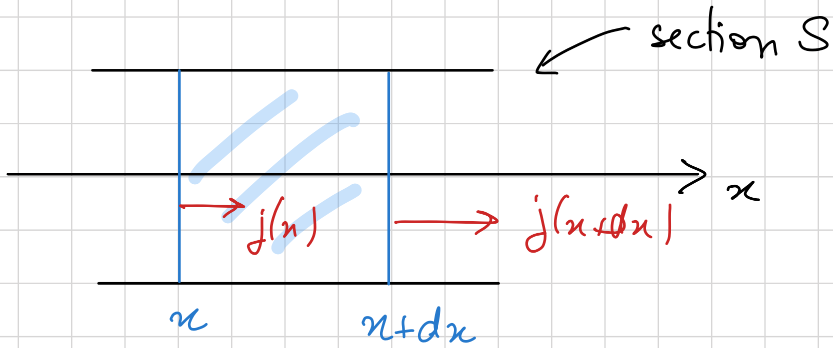
Interrogation de cours _ EM _ Ch 4 et 5

1) $\vec{j}$ = vecteur densité de courant $(A.m^{-2})$

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

2)



$\vec{j} = j(x,t)\,\vec{u}_x$

($j \cdot S\,dt$ = charge de traversant S pendant dt)

Charge dans $\mathcal{D}$ à $t+dt$ = charge dans $\mathcal{D}$ à t + charge entrée en x pendant dt − charge sortie en $x+dx$ pendant dt

$$\rho(t+dt,x)\,S\,dx = \rho(t,x)\,S\,dx + j(x,t)\,S\,dt - j(x+dx,t)\,S\,dt$$

Soit

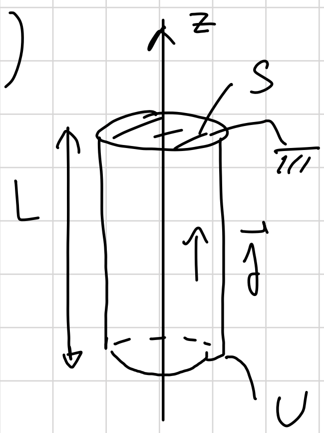
$$\underbrace{\Big(\rho(t+dt,x) - \rho(t,x)\Big)}_{\frac{\partial \rho}{\partial t}dt} S\,dx = -\Big(\underbrace{j(x+dx,t) - j(x,t)}_{\frac{\partial j}{\partial x}dx}\Big) S\,dt$$

On obtient donc : $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0}$

Dans le cas général, l'équation locale de conservation de la charge s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

En régime statique on obtient $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ ce qui correspond à la loi des noeuds.

3) 

Cylindre de section S de hauteur L parcouru par $\vec{j} = j\,\vec{u}_z$ uniforme

$$\begin{cases} i = jS & \text{soit} \quad i = \gamma E S \\ \vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \text{ uniforme} : \vec{E} = E\,\vec{u}_x \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -E \quad \text{soit } V(x) = -Ex + V_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U = V(0) - V(L) = EL \\ E = \dfrac{i}{\gamma S} \end{cases}$$

Finalement : $U = \dfrac{L}{\gamma S}\, i$

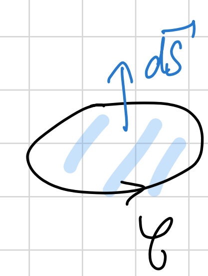
$\Rightarrow R = \dfrac{L}{\gamma S}$ résistance du cylindre

$\gamma \sim 10^7\ S.m^{-1}$ pour un conducteur métallique.

4) Maxwell Thomson : $\text{div}\,\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_{\mathcal{S}} \vec{B}.\vec{dS} = 0$

$\vec{B}$ est à flux conservatif

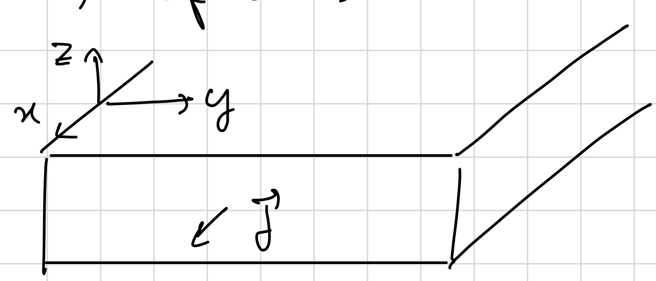
5) Maxwell - Ampère : $\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

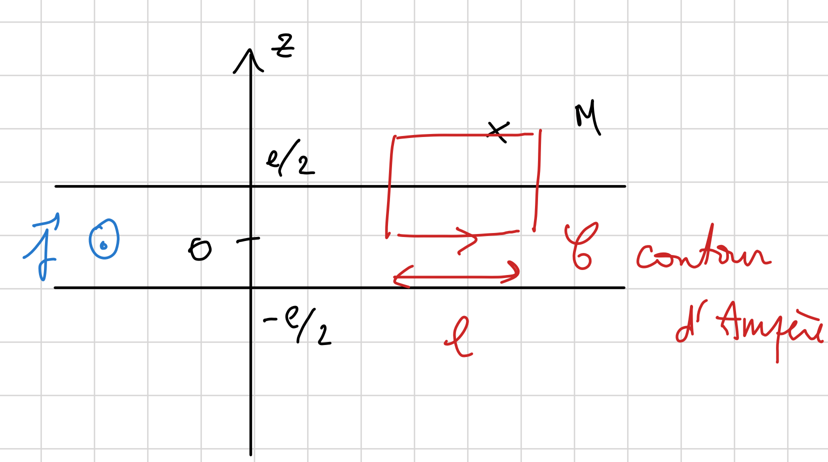


$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}.\vec{dl} = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{\text{rot}}\,\vec{B}).\vec{dS} \quad (\text{th. de Stokes})$$

$$= \mu_0 \underbrace{\iint_{\mathcal{S}} \vec{j}.\vec{dS}}_{I_{\text{enlacé}}}$$

6) 7) et 8) cf cours

9) 



Symétrie : . le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie

$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M)\,\vec{u}_y$

. Le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est un plan de symétrie

$\Rightarrow$ $\vec{B}$ s'annule en tout point de ce plan (2 plans de symétrie)

Invariances : la distribution de courant est invariante par translation suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ (plan infini) $\Rightarrow B(M) = B(z)$

Finalement $\vec{B}(M) = B(z)\,\vec{u}_y$

a) À l'aide de l'équation de Maxwell Ampère $\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B(z) \\ 0 \end{pmatrix} = -B'(z)\,\vec{u}_x$$

* $z \in \left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right] \Rightarrow B'(z) = -\mu_0 j$

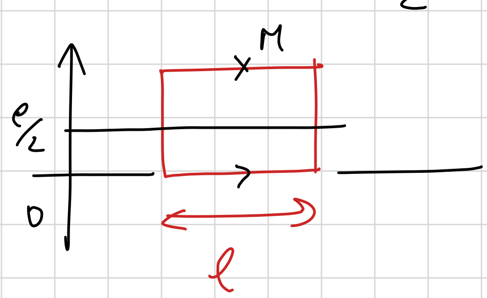
soit $B(z) = -\mu_0 j z$ car $B(0) = 0$

* $|z| \geq \frac{e}{2} \Rightarrow B'(z) = 0$

$z \geq \frac{e}{2}$ $\quad B(z) = -\mu_0 j \frac{e}{2}$

$z \leq \frac{e}{2}$ $\quad B(z) = \mu_0 j \frac{e}{2}$

b) Avec le théorème d'Ampère



$$\underbrace{\oint \vec{B}\cdot\vec{dl}}_{-B(z)\,l \text{ car } B(0)=0} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

1er cas $\quad 0 \leq z \leq \frac{e}{2} \qquad I_{enlacé} = j\,\ell\,z$

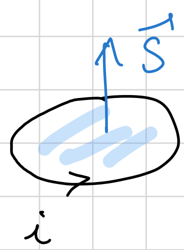
$$\Rightarrow B(z) = -\mu_0\, j\, z$$

2e cas $\quad \frac{e}{2} \leq z \qquad I_{enlacé} = j\,\ell\,\frac{e}{2}$

$$\Rightarrow B(z) = -\mu_0\, j\, \frac{e}{2}$$

(Oxy) est un plan de symétrie donc $B(z)$ est impaire.

10)



$\vec{\mathcal{M}} = i\,\vec{S}$ en $A.m^2$

$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext} \qquad E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$ dans un champ $\vec{B}_{ext}$