# Mécanique - TD1 - Lois de Coulomb

## Exercice 1 - Modélisation simplifiée d'une avalanche

On considère un bloc de neige, assimilable à un solide de masse $m$, de centre de gravité $G$, reposant sur un plan incliné d'un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontale. Dans cet exercice, on distingue les coefficients de frottement statique $\mu_s$ et dynamique $\mu_d \leq \mu_s$.

1. Montrer que l'équilibre est possible tant que $\alpha < \alpha_c$ où $\alpha_c$ est la valeur critique de l'angle $\alpha$ dont on donnera l'expression.
2. La masse de neige en équilibre sur une pente d'angle $\alpha_c$ subit une légère perturbation qui lui donne une vitesse initiale $\vec{v}(0) = v_o\vec{e}_x$, $v_o > 0$. Exprimer sa vitesse ultérieure $v(t)$ et son énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)$. Exprimer $\mathcal{E}_c$ en fonction de $\mu_s$, $\mu_d$ et $\alpha_c$.
3. L'énergie acquise sert en fait à mettre en mouvement de nouveaux blocs de neige, conduisant à l'amplification de l'avalanche. Les valeurs approximatives des coefficients de frottement statiques et dynamiques pour différents types de neige sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

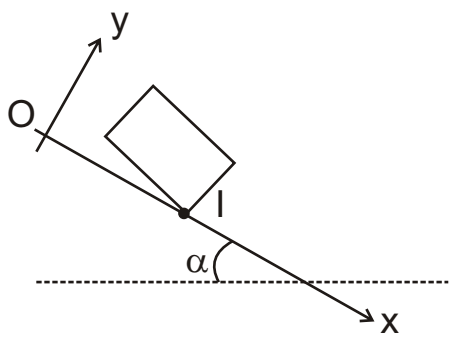
| Type de neige | $\mu_s$ | $\mu_d$ |
|---|---|---|
| Neige fraiche | jusqu'à 10 | 0,3 |
| Neige en gobelet | 1,2 | 0,7 |
| Neige à grains ronds | 1,2 | 0,4 |

   D'après la question précédente, quelle type de neige conduit aux avalanches les plus violentes ?
4. Au bout d'un temps $t_1$, la neige animée d'une vitesse $v_1$ arrive dans une zone de pente où l'angle $\alpha$ prend une valeur plus faible. À quelle condition sur $\alpha$ le mouvement est-il ralenti ?

## Exercice 2 - Bloc sur un plan incliné

Un bloc de masse $m$ de longueur $\ell$ égale à sa largeur et de hauteur $h$ repose sur un plan initialement horizontal. On note $f = 0,5$ le coefficient de frottement entre le bloc et le plan. Un opérateur augmente progressivement la valeur de l'angle $\alpha$ que fait le plan avec l'horizontal. On modélise le basculement éventuel du bloc par un pivotement autour de l'arrête du bloc passant par le point $I$. On note $J_z$ le moment d'inertie du bloc par rapport à cet axe et $\vec{\omega} = -\omega\vec{e}_z$ son vecteur rotation.

1. On ignore la possibilité de basculement. À quelle condition sur $\alpha$ y a-t-il glissement ?
2. À quelle condition sur $\alpha$ y a-t-il basculement sans glissement ?
3. En déduire la condition sur les dimensions du bloc telle que celui-ci glisse sans avoir basculé.



**Exercice 3 - Cylindre sur un plan incliné**

Un cylindre de rayon $R$, de masse $m$, de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$ par rapport à son axe de symétrie roule sans glisser le long d'une pente inclinée d'un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement entre le cylindre et le plan est noté $f$. Lors de son mouvement l'énergie cinétique du cylindre s'écrit :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

1. Donner l'expression de $\mathcal{E}_c$ en fonction de $\dot{x}_G$ vitesse du centre de gravité $G$ du cylindre.
2. À l'aide du théorème de la puissance cinétique, montrer alors que :

$$\ddot{x}_G = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

3. En déduire la condition pour avoir roulement sans glissement :

$$\tan(\alpha) < 3f$$

**Exercice 4 - Positionnement d'une échelle contre un mur**

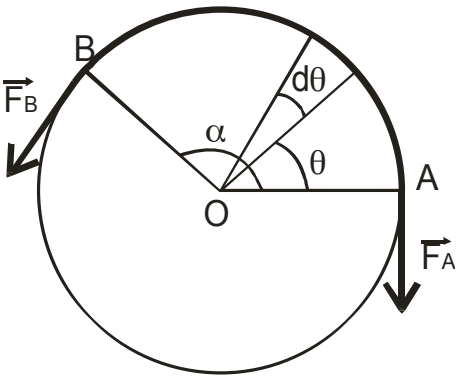
Une échelle est posée contre un mur vertical, son autre extrémité reposant sur le sol horizontal. Il n'y a pas de frottement entre l'échelle et le mur, le coefficient de frottement entre l'échelle et le sol est $f$. Quelles conditions doit respecter l'utilisateur s'il veut éviter que l'échelle glisse sur le sol ?

On négligera la masse de l'échelle devant celle de l'utilisateur et on assimiler l'utilisateur à un point matériel $M$ de masse $m$.

**Exercice 5 - Équilibre d'un fil sur un arbre cylindrique**

Un fil de masse négligeable, sans raideur, est enroulé d'un angle $\alpha$ sur un arbre cylindrique de rayon $a$. Le contact arbre-fil est caractérisé par un coefficient de frottement $f$. On exerce une force de norme $F_A$ sur l'extrémité $A$ du fil, et on cherche la valeur minimale de la norme $F_B$ de la force à appliquer à l'autre extrémité $B$ du fil pour qu'il soit à l'équilibre.

1. On repère un point courant $M$ du tronçon de fil en contact avec l'arbre par l'angle $\theta \in [0, \alpha]$. $\vec{t}(\theta)$ désigne le vecteur unitaire tangent au fil dans le sens des $\theta$ croissants ; $\vec{n}(\theta)$ désigne le vecteur unitaire normal au fil orienté de l'arbre vers l'extérieur. Exprimer le vecteur $\vec{t}(\theta + d\theta)$ sur la base $(\vec{t}(\theta), \vec{n}(\theta))$ en se limitant au premier ordre en $d\theta$.




On modélise les efforts qu'exerce le tronçon de fil $[\theta, \alpha]$ sur le tronçon de fil $[0, \theta]$ par une force

$$\vec{T}(\theta) = T(\theta)\vec{t}(\theta)$$

appelée tension du fil. On raisonne sur le tronçon de fil $MM'$ compris entre $\theta$ et $\theta + d\theta$. Ce tronçon est soumis aux forces exercées sur lui par les tronçons $AM$ et $M'B$, ainsi qu'à la force de contact $d\vec{R}$ qu'exerce l'arbre sur lui.

2. Écrire une condition nécessaire d'équilibre de $MM'$ reliant $\vec{T}(\theta)$, $\vec{T}(\theta + d\theta)$ et $d\vec{R}$.
3. Pour $d\theta$ suffisamment petit, on peut utiliser le modèle du contact ponctuel entre deux solides tel qu'il est donné par les lois de Coulomb. Établir deux équations scalaires reliant $T(\theta)$, $T(\theta + d\theta)$, $dR_t$ et $dR_n$.
4. Dans la situation envisagée, quels sont les signes de $dR_t$ et $dR_n$ ? En déduire la relation valable, à la limite du glissement entre $dR_t$ et $dR_n$.
5. En déduire que la tension $T(\theta)$ est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{d\theta} + fT(\theta) = 0$$

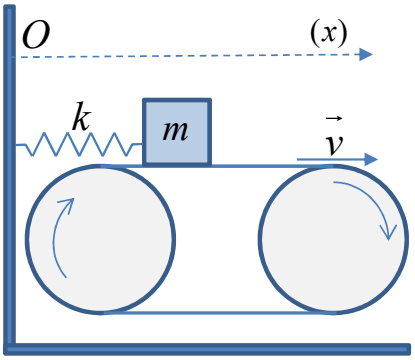
6. En déduire la relation entre $F_A$, $F_B$, $f$ et $\alpha$. Application numérique : $f$ =0,6. Calculer $F_B/F_A$ pour $\alpha = \pi$. Un matelot peut exercer confortablement une force de $10^2$ N, pour quelle valeur minimale $\alpha_o$ de $\alpha$ peut-il résister à une force de $10^4$ N exercée par le bateau sur le premier brin de corde ?

## Exercice 6 - Mouvement collé - glissé [1]

*La question 5.2 conduit à négliger $f_d$ lors de la phase de glissement alors qu'on ne le néglige pas dans la phase de non glissement $f_s$ (cohérent avec $f_s > f_d$).*

### 5. L'OSCILLATEUR DE RELAXATION « STICK-SLIP » : UN MODELE SIMPLE EN GEOPHYSIQUE

Le coulissement entre deux plaques lithosphériques (faille *transformante*) peut être modélisé en première approximation par le dispositif suivant : un objet considéré comme *ponctuel*, de masse $m$, est posé sur un tapis roulant entraîné à une vitesse $\vec{v}$ constante (par rapport au sol, considéré comme « fixe »). Cet objet, qui est choisi comme « système », est également relié à un point fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur $k$. La position du centre de l'objet est repérée par son abscisse $x$ (axe horizontal). A l'instant $t=0$, le ressort n'est pas tendu (il n'exerce aucune force sur ses extrémités), et l'abscisse de la masse est notée $x_0$ (c'est la longueur à vide du ressort).




5.1. On constate que tant que l'intensité de la force de traction $\vec{T}$ exercée par le ressort ne dépasse pas une valeur $T_{max}$, l'objet reste « collé », c'est-à-dire fixe par rapport au tapis. Exprimer alors la loi horaire $x(t)$ durant cette phase. Ecrire une relation simple entre la force de frottement $\vec{F}$ exercée par le tapis sur l'objet et la force $\vec{T}$ exercée par le ressort. Justifier. En déduire la norme $F(t)$ de la force exercée par le tapis sur l'objet.

Par contre dès que $\|\vec{T}\|$ atteint la valeur $T_{max}$, l'objet « se décolle » et on considère qu'il glisse sans frottement sur le tapis : $\vec{F}$ s'annule, et l'objet n'est plus soumis qu'à l'action du ressort.

5.2. A quel instant $t_1$ (à exprimer en fonction de $T_{max}, k$ et $v$) l'objet décolle-t-il du tapis ? A quelle équation différentielle obéit la position $x(t)$ de cet objet dans la phase qui suit ?

5.3. Justifier que l'on peut écrire la solution de cette équation différentielle sous la forme $x(t) = x_0 + A\sin\left[\omega_0(t-t_1)+\alpha\right]$, où $A, \omega_0$ et $\alpha$ sont des constantes. Exprimer $\omega_0$ en fonction de $k$ et de $m$. En tenant compte des conditions initiales, exprimer $\tan\alpha$ en fonction de $\omega_0$ et $t_1$, et $A$ en fonction de $v, t_1$ et $\omega_0$.

5.4. Lorsque la vitesse de la masse par rapport au tapis s'annule à nouveau, la force de frottement $\vec{F}$ réapparaît. A quel instant $t_2$ cela se produit-il ? (exprimer $t_2$ en fonction de $t_1, \alpha$ et $\omega_0$). Vérifier qu'à cet instant, la longueur du ressort vaut $x(t_2) = x_0 - A\sin\alpha$.

5.5. La masse est alors de nouveau entraînée par le tapis à vitesse constante $v$. A quel instant $t_3$ décolle-t-elle à nouveau ? Représenter graphiquement l'allure du mouvement périodique de la masse $x(t)$. Exprimer sa période $T$ en fonction de $\omega_0, \alpha, A$ et $v$.

1. D'après Banque G2E 2021