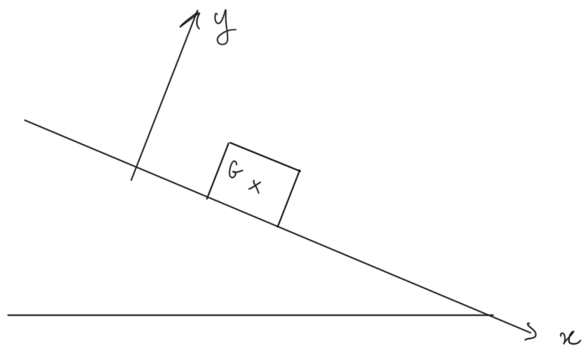
Mécanique - TD1 - Lois de Coulomb

Exercice 1 - Bloc sur un plan incliné

On place un bloc parallélépipédique de masse m sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note f le coefficient de frottement entre le bloc et le plan.

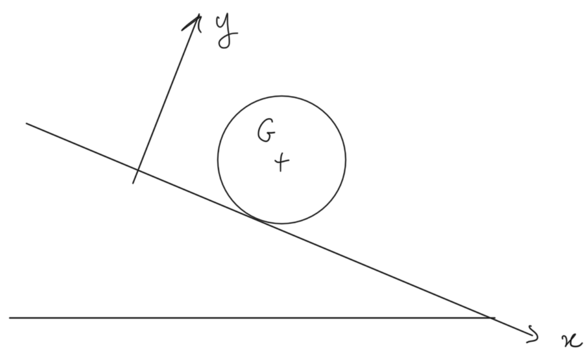
1. On suppose que le bloc ne glisse pas. En déduire une condition sur l'angle α.
2. On donne une vitesse $\vec{v}_G(0) = -v_o\vec{u}_x$ au bloc à l'instant $t = 0$. Décrire les deux phases du mouvement. Établir l'expression de la longueur ℓ que le bloc remonte sur le support en faisant un bilan énergétique.
3. Dans le cas où l'angle α est petit, à quelle condition sur les dimensions du bloc peut-on le poser sur le plan incliné sans qu'il bascule ?



Exercice 2 - Cylindre sur un plan incliné

Un cylindre de rayon a, de masse m, de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}ma^2$ par rapport à son axe de symétrie roule sans glisser le long d'une pente inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement entre le cylindre et le plan est noté f. Lors de son mouvement l'énergie cinétique du cylindre s'écrit :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$



1. Montrer que la condition de non glissement impose $v_G = \dot{x}_G = \pm a\omega$.
2. Écrire la loi de la quantité de mouvement appliquée au cylindre en projection sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. Pourquoi a-t-on besoin d'une équation supplémentaire ?
3. Donner l'expression de $\mathcal{E}_c$ en fonction de $\dot{x}_G$ vitesse du centre de gravité G du cylindre.

4. À l'aide du théorème de la puissance cinétique, montrer alors que :

$$\ddot{x}_G = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

5. En déduire la condition pour avoir roulement sans glissement :

$$\tan(\alpha) < 3f$$

6. Dans le cas d'un solide, on peut appliquer le théorème du moment cinétique au point G même si ce dernier est mobile. Vérifier que l'application du théorème du moment cinétique en G aurait également permis d'obtenir le résultat. *Comme l'axe* (Gz) *est un axe de révolution du cylindre, on a :*

$$\vec{L}_G = J\omega \vec{u}_z$$

Exercice 3 - Positionnement d'une échelle contre un mur

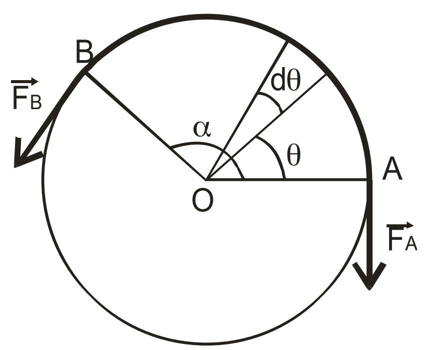
Une échelle de longueur L est posée contre un mur vertical, son autre extrémité reposant sur le sol horizontal. Il n'y a pas de frottement entre l'échelle et le mur, le coefficient de frottement entre l'échelle et le sol est f. On négligera la masse de l'échelle devant celle de l'utilisateur et on assimilera l'utilisateur à un point matériel M de masse m.

1. Faire un schéma en indiquant les différentes forces.
2. Écrire deux équations vectorielles traduisant la condition d'équilibre de l'échelle. En déduire l'expression des actions de contact entre le sol et l'échelle.
3. Quelle condition doit respecter l'utilisateur s'il veut éviter que l'échelle glisse sur le sol ?

Exercice 4 - Équilibre d'un fil sur un arbre cylindrique

On souhaite soulever une charge à l'aide d'un fil enroulé sur un tige cylindrique. On exerce pour cela la force $\vec{F}_A$ en A. Ce fil de masse négligeable, sans raideur, est enroulé d'un angle α sur un arbre cylindrique de rayon a. Le contact arbre-fil est caractérisé par un coefficient de frottement f.
On cherche la valeur minimale de la norme F_B de la force à appliquer à l'autre extrémité B du fil pour qu'il soit à l'équilibre (F_B correspondra in fine au poids de la charge à soulever).

1. On repère un point courant M du tronçon de fil en contact avec l'arbre par l'angle $\theta \in [0, \alpha]$. $\vec{u}_\theta$ désigne le vecteur unitaire tangent au fil dans le sens des θ croissants ; $\vec{u}_r$ désigne le vecteur unitaire normal au fil orienté de l'arbre vers l'extérieur. Exprimer le vecteur $\vec{u}_{\theta+d\theta}$ sur la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ en se limitant au premier ordre en $d\theta$.



On modélise les efforts qu'exerce le tronçon de fil $[\theta, \alpha]$ sur le tronçon de fil $[0, \theta]$ par une force

$$\vec{T}(\theta) = T(\theta)\vec{u}_\theta$$

appelée tension du fil.
On raisonne sur le tronçon de fil MM' compris entre θ et $\theta + d\theta$. Ce tronçon est soumis aux forces exercées sur lui par les tronçons AM et $M'B$, ainsi qu'à la force de contact $d\vec{R}$ qu'exerce l'arbre sur lui.

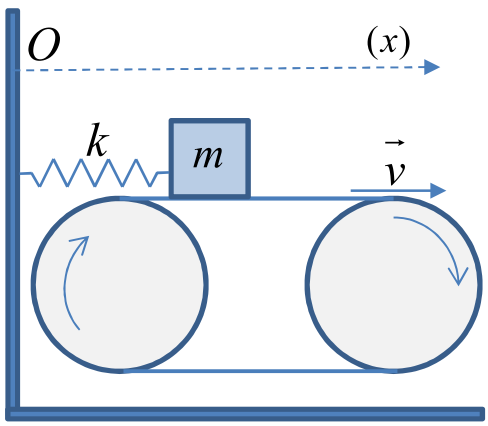
2. Écrire une condition nécessaire d'équilibre de MM' reliant $\vec{T}(\theta)$, $\vec{T}(\theta + d\theta)$ et $d\vec{R}$.
3. Pour $d\theta$ suffisamment petit, on peut utiliser le modèle du contact ponctuel entre deux solides tel qu'il est donné par les lois de Coulomb. Établir deux équations scalaires reliant $T(\theta)$, $T(\theta + d\theta)$, dR_t et dR_n.
4. Dans la situation envisagée, quels sont les signes de dR_t et dR_n ? En déduire la relation valable, à la limite du glissement entre dR_t et dR_n.
5. En déduire que la tension $T(\theta)$ est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{d\theta} + fT(\theta) = 0$$

6. En déduire la relation entre F_A, F_B, f et α. Application numérique : f =0,6. Calculer F_B/F_A pour $\alpha = \pi$. Un matelot peut exercer confortablement une force de 10^2 N, pour quelle valeur minimale α_o de α peut-il résister à une force de 10^4 N exercée par le bateau sur le premier brin de corde ?

Exercice 5 - Mouvement collé - glissé [1]

Le coulissement entre deux plaques lithosphériques (faille transformante) peut être modélisé en première approximation par le dispositif suivant : un objet considéré comme ponctuel, de masse m, est posé sur un tapis roulant entraîné à une vitesse $\vec{v}$ constante (par rapport au sol, considéré comme « fixe »). Cet objet, qui est choisi comme système, est également relié à un point fixe O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k. La position du centre de l'objet est repérée par son abscisse x (axe horizontal).
À l'instant initial, le ressort n'est pas tendu (il n'exerce aucune force sur ses extrémités), et l'abscisse de la masse est notée x_o (c'est la longueur à vide du ressort).
On notera f le coefficient de frottement statique et on négligera le coefficient de frottement dynamique (pas de frottement lorsque l'objet glisse, vous pourrez reprendre l'exercice sans cette hypothèse dans un second temps) .



1. D'après Banque G2E 2021

1. On constate que tant que l'intensité de la force de traction $\vec{F}$ exercée par le ressort ne dépasse pas une valeur F_{max}, l'objet reste "collé", c'est-à-dire fixe par rapport au tapis.
   Écrire une relation simple entre la force de frottement $\vec{R_t}$ exercée par le tapis sur l'objet et la force $\vec{F}$ exercée par le ressort. Exprimer alors la loi horaire $x(t)$ durant cette phase et en déduire la norme $R_t(t)$ de la force exercée par le tapis sur l'objet.
2. Déterminer l'instant t_1 pour lequel l'objet se met à glisser sur le tapis. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ durant cette phase du mouvement.
   Justifier que l'on peut écrire $x(t)$ sous la forme :
   $$x(t) = x_o + A\sin(\omega_o(t - t_1) + \alpha)$$
   Déterminer les expressions de A et $\tan(\alpha)$ en fonction de v, t_1 et ω_o.
3. Lorsque la vitesse de la masse par rapport au tapis s'annule à nouveau, la force de frottement R_t réapparaît. À quel instant t_2 cela se produit-il ? Vérifier qu'à cet instant, la longueur du ressort vaut :
   $$x(t_2) = x_o - A\sin\alpha$$
4. La masse est alors de nouveau entraînée par le tapis à vitesse constante v. À quel instant t_3 décolle-t-elle à nouveau ? Représenter graphiquement l'allure du mouvement périodique de la masse $x(t)$.

Un script Python modélisant ce système proposé par Alexandre (MPI 2023-2024) est disponible dans le dossier correction.