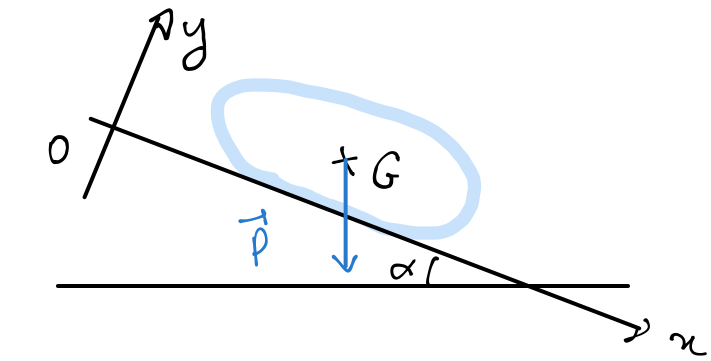
MECANIQUE - TD1 - Lois de Coulomb

Exercice 1



On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1) BAME :

* poids $\vec{P} = m g \sin\alpha \, \vec{u_x} - m g \cos\alpha \, \vec{u_y}$ en G

* action de contact : $\vec{R} = -R_t \, \vec{u_x} + R_n \, \vec{u_y}$

L'équilibre correspond à :

TRC : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ $\quad (m \, \vec{a_G} = \vec{0})$

Non glissement $\quad R_t < \mu_s R_n$

On a ainsi : $\begin{cases} m g \sin\alpha - R_t = 0 \\ - m g \cos\alpha + R_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_t = m g \sin\alpha \\ R_n = m g \cos\alpha \end{cases}$

$R_t < \mu_s R_n \Leftrightarrow \tan\alpha < \mu_s$

soit $\boxed{\alpha < \alpha_c \quad \text{avec} \quad \alpha_c = \arctan(\mu_s)}$

2) La neige glisse sur le plan incliné

$\Rightarrow R_t = \mu_d R_n$

TRC : $m \dfrac{d\vec{v_G}}{dt} = \vec{R} + \vec{P} \Leftrightarrow \begin{cases} m \dfrac{dv}{dt} = -R_t + m g \sin\alpha \\ 0 = R_n - m g \cos\alpha \end{cases}$

On a ainsi : $R_t = \mu_d m g \cos\alpha$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dv}{dt} = g \left(\sin\alpha_c - \mu_d \cos\alpha_c \right)}$

On intègre

$$\boxed{v(t) = v_0 + g(\sin\alpha_c - \mu_d\cos\alpha_c)t}$$

La neige est en translation à la vitesse v, on peut donc écrire :

$$\boxed{\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0 + g(\sin\alpha_c - \mu_d\cos\alpha_c)t\right)^2}$$

On a montré à la question précédente : $\frac{\sin\alpha_c}{\cos\alpha_c} = \mu_s$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0 + g\cos\alpha_c(\mu_s - \mu_d)t\right)^2$$

3) On calcule : $\cos\alpha_c(\mu_s - \mu_d)$ pour les différents types de neige :

	α_c	$\cos(\alpha_c)(\mu_s - \mu_d)$
neige fraiche	84°	~ 1
gobelets	50°	0,3
grains ronds	50°	0,5

la neige fraiche reste en équilibre même sur de fortes pentes

les grains ronds correspondent à une plus grande énergie cinétique et correspond a priori aux avalanches les plus violentes.

4) L'avalanche est ralentie à condition d'avoir $\frac{dv}{dt} < 0$

Soit, en reprenant le raisonnement de la question 2) :

$$g(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha) < 0 \Rightarrow \boxed{\tan\alpha < \mu_d}$$

Comme $\mu_d < \mu_s$ cette condition est plus contraignante que la condition d'équilibre obtenue à la question 1).

Exercice 2

1) On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

BAME : * poids $\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y}$ en G

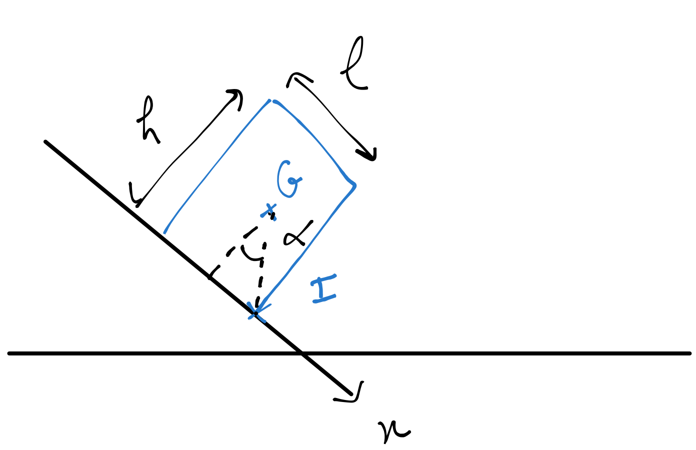
* Réaction $\vec{R} = -R_t\,\vec{u_x} + R_n\,\vec{u_y}$

TRC : $$m\frac{d\vec{v_G}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - R_t \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_n \end{cases}$$

Le non glissement correspond à $\frac{dv}{dt} = 0$ et $R_t < f R_n$

soit $$mg\sin\alpha < f\,mg\cos\alpha$$

Il y a donc $\boxed{\text{glissement pour } \tan\alpha > f}$

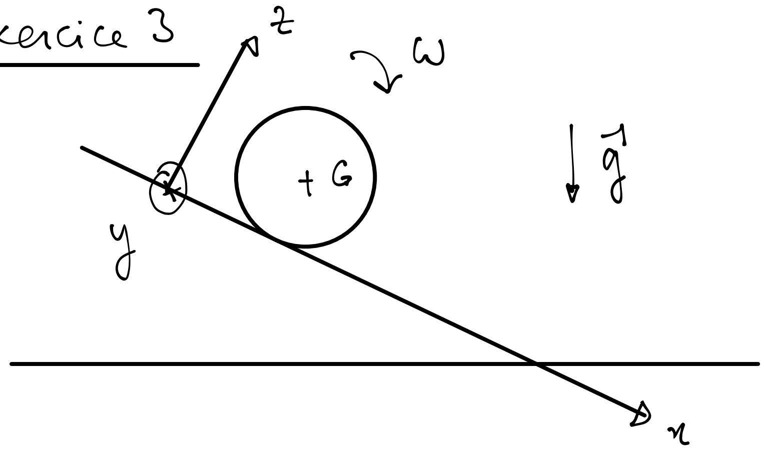
2) 

Il y a basculement lorsque G est à la verticale du point I

$$\tan\alpha = \frac{\ell/2}{h/2} = \frac{\ell}{h}$$ à la limite du basculement

3) La condition : $$\boxed{f < \tan\alpha < \frac{\ell}{h}}$$ permet d'avoir glissement sans basculement.

Exercice 3



1) La condition de roulement sans glissement s'écrit :

$$\dot{x}_G = R\omega$$

On a donc : $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} m \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \times \frac{3}{2} m \dot{x}_G^2}$$

2) Loi de la puissance cinétique : $\frac{d E_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{R})$

$\mathcal{P}(\vec{R}) = 0$ dans le cas du roulement sans glissement.

$$\mathcal{P}(P) = \left(m g \sin\alpha \, \vec{u_x} - m g \cos\alpha \, \vec{u_z} \right) \cdot \dot{x}_G \vec{u_x}$$

$$= m g \sin\alpha \, \dot{x}_G$$

On a donc $\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4} m \dot{x}_G^2 \right) = m g \sin\alpha \, \dot{x}_G$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m \dot{x}_G \ddot{x}_G = m g \sin\alpha \, \dot{x}_G$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_G = \frac{2}{3} g \sin\alpha}$$

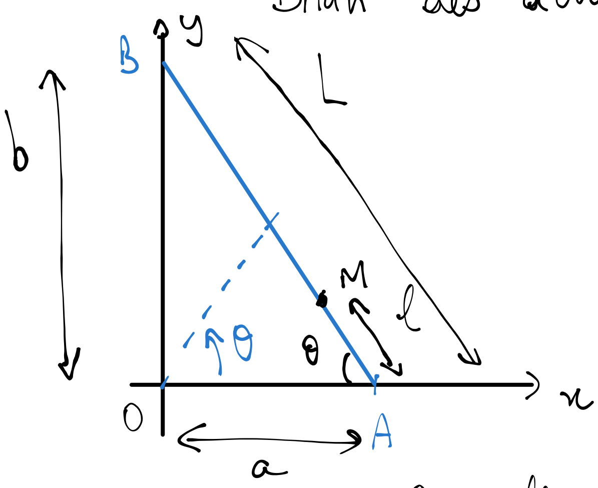
3) On écrit le TRC en projection sur $\vec{u_x}$ et $\vec{u_z}$:

$$\begin{cases} m \ddot{x}_G = -R_t + m g \sin\alpha \\ 0 = R_n - m g \cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_t = m g \sin\alpha - \frac{2}{3} m g \sin\alpha \\ R_n = m g \cos\alpha \end{cases}$$

soit $R_t = \frac{1}{3} m g \sin\alpha$ et $R_n = m g \cos\alpha$

Condition de non-glissement : $R_t < f R_n \Rightarrow \boxed{\tan\alpha < 3 f}$

Exercice 4



Bilan des actions mécaniques s'exerçant sur {échelle + M} :

- réaction en B : $\vec{R}_B = F\,\vec{u}_x$
- réaction en A : $\vec{R}_A = N\,\vec{u}_y - T\,\vec{u}_x$
- Poids de M en M : $\vec{P} = -mg\,\vec{u}_y$

Le système {échelle + M} est à l'équilibre :

$$\begin{cases} \vec{R}_B + \vec{R}_A + \vec{P} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{R}_B) + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{R}_A)}_{\vec{0} \text{ car } \vec{R}_A \text{ s'exerce en } A} + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = T \\ N = mg \\ -bF + \ell mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

On a ainsi

$$\begin{cases} N = mg \\ T = \dfrac{\ell}{b}\, mg\cos(\theta) \end{cases}$$

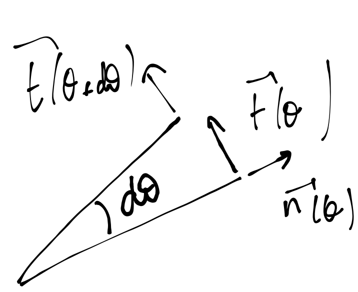
En ~~notant~~ L la longueur de l'échelle $b = L\sin\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} N = mg \\ T = \dfrac{\ell}{L}\, mg\, \dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$

On écrit la condition de non glissement en A : $T < fN$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\ell}{L} < f\tan\theta}$$

Exercice 5



$\vec{F} \leftrightarrow \vec{u}_\theta$ en cylindrique

$\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$ et $\vec{u}_r \leftrightarrow \vec{n}$

On a ainsi $\dfrac{\vec{F}(\theta+d\theta)-\vec{F}(\theta)}{d\theta} = -\vec{n}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}(\theta+d\theta) = \vec{F}(\theta) - \vec{n}\, d\theta}$$

2) Equilibre de MM' : $\underbrace{\vec{T}(\theta+d\theta)}_{\text{force de } [\theta+d\theta,\alpha] \text{ sur } [0,\theta+d\theta]} - \underbrace{\vec{T}(\theta)}_{\text{force de } [\theta,\alpha] \text{ sur } [0,\theta]} + d\vec{R} = \vec{0}$

force de $[\theta,\alpha]$ sur $[0,\theta]$ = opposée de celle s'exerçant sur MM'

3) $\dfrac{d\vec{T}}{d\theta} = \dfrac{dT}{d\theta}\vec{t} - T\vec{n}$ $\left(\dfrac{dT}{d\theta} = \dfrac{T(\theta+d\theta)-T(\theta)}{d\theta} \right)$

L'équation obtenue en 2) donne donc par projection :

$$\begin{cases} T(\theta+d\theta) - T(\theta) + dR_t = 0 & \rightarrow \quad dR_t = -\dfrac{dT}{d\theta}\, d\theta \\ -T(\theta)\, d\theta + dR_n = 0 \end{cases}$$

4) $dR_n > 0$ $\left(F_B < F_A \text{ a priori ici } \dfrac{dT}{d\theta} < 0 \text{ et } dR_t > 0 \right)$

$\Downarrow$ si F_B trop faible le fil glisse vers la droite et $dR_t > 0$ ok.

À la limite du glissement : $dR_t = f\, dR_n$

5) On a ainsi $-\dfrac{dT}{d\theta}\, d\theta = f\, T(\theta)\, d\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dT}{d\theta} + f\, T(\theta) = 0}$$

6) On a ainsi $T(\theta) = A\, e^{-f\theta}$

$$\begin{cases} T(0) = F_A = A \\ T(\alpha) = F_B = A e^{-f\alpha} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{F_B = F_A\, e^{-f\alpha}}$$

A.N : $\alpha = \pi$: $\frac{F_B}{F_A} = 0{,}15$

$$\alpha = \frac{1}{f} \ln\left(\frac{F_A}{F_B}\right) \qquad \text{A.N :} \quad \alpha = \frac{1}{0{,}6} \ln(10^2) = 7{,}7 \text{ rad}$$

soit 1,2 tours

Exercice 6

À $t=0$ $x(0) = x_0$ longueur à vide du ressort

5.1. Lorsque l'objet est collé au tapis $\dot{x}(t) = v$ et $x(t) = vt + x_0$

Le PFD s'écrit $\underbrace{m\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{0}} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{P}$

$\vec{0}$ car l'objet avance à vitesse constante

On a donc $\vec{F} = -\vec{T}$

$$F(t) = k\,(x(t) - x_0)$$

soit $F(t) = k\,(vt - x_0)$

5.2. On a $N = mg$, le décollement a lieu lorsque $F = fN$

(soit $T_{max} = fmg$)

$$k(x_0 + vt_1 - x_0) = T_{max} \Rightarrow t_1 = \frac{fmg}{kv} \qquad \left(x_1 = x_0 + \frac{fmg}{k}\right)$$

Dans la phase qui suit on a $F = 0$

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + A\sin(\omega_0(t - t_1) + \alpha)$$

constantes d'intégrations à déterminer avec $\begin{cases} x(t_1) = x_0 + \dfrac{fmg}{k} \\ \dot{x}(t_1) = v \end{cases}$

$$\begin{cases} x_0 + A \sin\alpha = x_0 + \dfrac{fmg}{k} \\ A\omega_0 \cos\alpha = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\sin\alpha = \dfrac{mfg}{k} = v t_1 \\ A\cos\alpha = \dfrac{v}{\omega_0} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \tan\alpha = \frac{mfg}{k}\,\frac{\omega_0}{v} = \omega_0 t_1$$

$$\downarrow$$

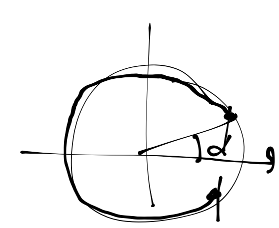
$$A^2 = v^2 t_1^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} \quad \text{soit} \quad A = v\sqrt{t_1^2 + \frac{1}{\omega_0^2}}$$

5.4. On cherche l'instant t_2 tel que $\dot{x}(t_2) = v$

$$\dot{x}(t_2) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha\right) = v$$

$$\Rightarrow \cos\left(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha\right) = \frac{1}{\omega_0\sqrt{t_1^2 + \frac{1}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2 t_1^2}}$$

Or $(\omega_0 t_1)^2 = \tan^2\alpha$ et $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$



$$\Rightarrow \cos\left(\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha\right) = \cos\alpha$$

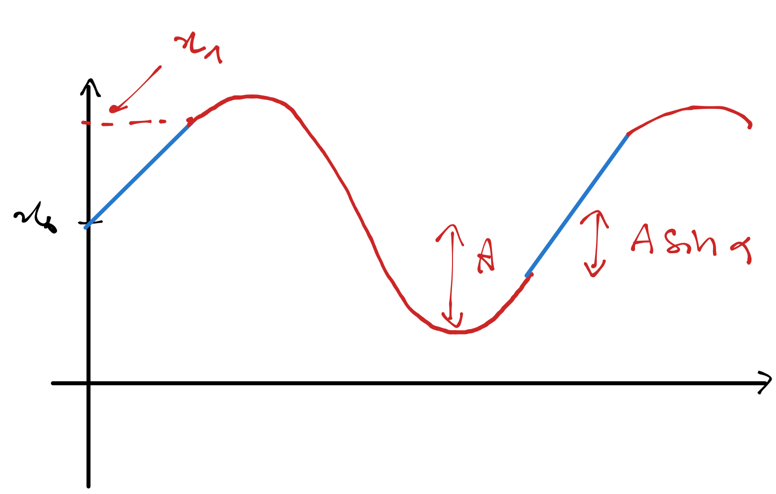
soit $\omega_0(t_2 - t_1) + \alpha = 2\pi - \alpha$

$$t_2 = t_1 + \frac{2(\pi - \alpha)}{\omega_0}$$

On écrit $x(t_2) = A\sin(2\pi - 2\alpha + \alpha) + x_0 = x_0 - A\sin\alpha$

5.5. Dans cette phase :

$$x(t) = v(t - t_2) + x_0 - A\sin\alpha$$



et on a comme précédemment :

$$k\left(x(t_3) - x_0\right) = T_{max}$$

$$\rightarrow \quad v(t_3 - t_2) - A\sin\alpha = \frac{fmg}{k}$$