Électromagnétisme
Chapitre 7 - Ondes électromagnétiques dans le vide

Équations de Maxwell dans le vide : $(\rho = 0\ ,\ \vec{j} = \vec{0})$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}(\ ))\ldots$

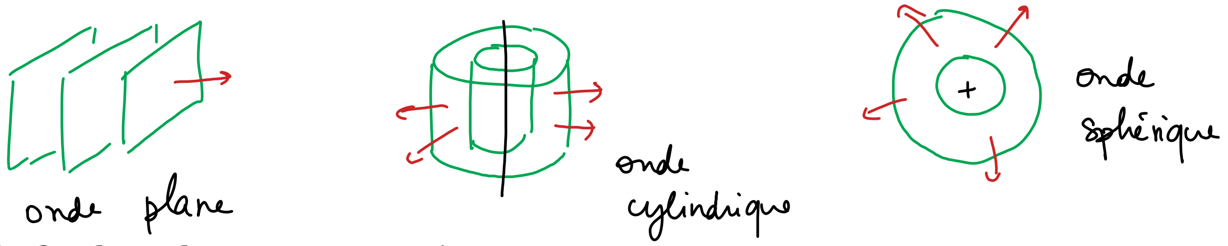
Équations de propagation :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Attention : les équations de Maxwell permettent d'établir les équations de propagation mais il n'y a pas équivalence (les équations de propagation ne font plus intervenir de couplage entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ notamment). Il faudra toujours vérifier que les solutions des équations de propagation sont compatibles avec les équations de Maxwell.

Suivant la géométrie du problème envisagé, on va chercher la solution sous différentes formes. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux ondes planes pour lesquelles les ensembles de points évoluant avec la même phase forment des plans.



I. Ondes planes progressives

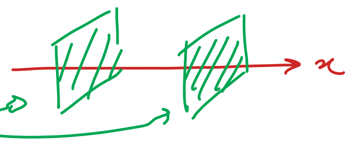
Une onde plane progressive est une onde de la forme :

$\vec{r} = \vec{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$

$$f(\vec{r}, t) = F(\vec{r}.\vec{u} - c\ t)$$

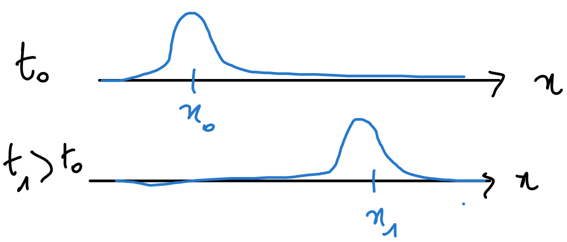
— $\vec{u}$ désigne la direction de propagation de l'onde, à un instant t_o fixé $F(\vec{r}.\vec{u} - c\ t_o)$ prend la même valeur en tout point des plans perpendiculaires à $\vec{u}$. Par exemple pour $\vec{u} = \vec{u}_x$:

$$F(\vec{r}.\vec{u} - c\ t) = F(x - c\ t)$$



Les plans $x = cte$ constituent les **surfaces d'onde**.

— Onde progressive signifie que l'on trouve la même forme un peu plus loin un peu plus tard :



$x_0 - c t_0 = x_1 - c t_1$

$\Rightarrow c = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$ Vitesse de propagation

1. Structure de l'OPP

On choisit toujours $\vec{u} = \vec{u}_x$ ce qui revient à écrire l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \ ; \ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On a ainsi :

$$\vec{E} = E_x(x-ct)\vec{u}_x + E_y(x-ct)\vec{u}_y + E_z(x-ct)\vec{u}_z$$

D'après l'équation de Maxwell Gauss :

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

Dans un problème d'ondes, les champs statiques (=les constantes d'intégration ici) ne nous intéressent pas, on a alors :

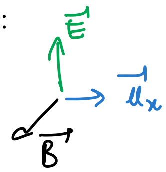
$$E_x = 0$$

$\vec{E} \perp \vec{u}_x$

On dit que le champ électrique est **transverse**. On montre de la même façon que :

$$B_x = 0$$

En exploitant l'équation de Maxwell Faraday, on peut montrer que :



Relation de structure de l'onde

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$$

L'onde ainsi obtenue est compatible avec les équations de Maxwell.

Attention : ces relations ne fonctionnent pas si $\vec{E}$ est une somme d'OPP de directions de propagation $\vec{u}$ différentes ou bien si la propagation ne se fait pas dans le vide.

2. Aspects énergétiques

Comparons les deux termes de la densité volumique en énergie :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_o}$$

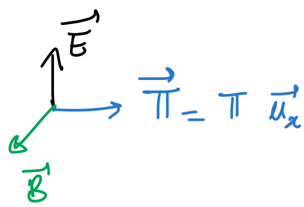
On a, d'après ce qui précède :

$$B^2 = \frac{E^2}{c^2} \Rightarrow \frac{B^2}{2\mu_o} = \varepsilon_o\mu_o\frac{E^2}{2\mu_o}$$

On dit qu'il y a équipartition de l'énergie entre les formes électriques et magnétiques.

$$u_{em} = 2\frac{\varepsilon_o E^2}{2} = \varepsilon_o E^2$$

Dans le cas du vecteur de Poynting, on a :



$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o} \Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_o\ c}\vec{u}_x$$

Soit :

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_o E^2\ c\ \vec{u}_x$$ $= u \cdot c \cdot \vec{u}_x$

Par analogie avec $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ (équation de conservation de la charge et équation de Poynting de formes analogues), on peut dire que, dans le cas d'une onde plane se propageant dans le vide, l'énergie électromagnétique se propage à la vitesse c dans la direction de propagation.

II. Ondes progressives monochromatiques (OPPM)

Les OPP ne sont pas faciles à manipuler dans les calculs. On préfère utiliser une base des OPP constituée par les OPPM. Comme les équations de Maxwell sont linéaires, on sait que la somme d'OPPM solutions des équations de Maxwell sera solution des équations de Maxwell.

1. Définition

On peut décomposer une OPP se propageant suivant $\vec{u}_x$ comme la somme d'OPPM se propageant suivant $\vec{u}_x$:

$\varphi(\omega)$ aussi

$$F(x-ct) = \int_0^\infty \tilde{f}(\omega)\cos(\omega t - kx - \varphi)d\omega$$

ou avec les complexes $\int_0^\infty \tilde{f}\, e^{i(\omega t - kx)} d\omega$

Une OPPM est une onde de la forme :

$$E(x,t) = E_o \cos(\omega t - kx - \varphi)$$

— Elle fait apparaitre une double périodicité : spatiale (période λ) et temporelle (période T).

— k désigne le vecteur d'onde, on a plus généralement :

$$E(\vec{r},t) = E_o \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} - \varphi)$$

La direction de $\vec{k}$ correspond à la direction de propagation. Sa norme est reliée à la longueur d'onde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

— La pulsation ω est donnée par les oscillations à l'origine de l'OPPM : elle ne change pas au cours de la propagation (linéarité des milieux). Le vecteur d'onde peut par contre changer suivant le milieu considéré.

et λ

— L'OPPM est une OPP :

$$\omega t - kx = -k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)$$

Elle se propage à la **vitesse de phase** :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$$

On peut vérifier que $E_y(x,t) = E_o \cos(\omega t - kx)$ est solution de l'équation de d'Alembert à condition d'avoir :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Il s'agit de la **relation de dispersion**.

↳ relation que doivent vérifier k et ω pour que l'OPPM soit solution de l'équation de propagation.

2. Utilisation de la notation complexe

On peut utiliser la notation complexe en écrivant :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_o} \exp\left(i(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\,)\right)$$

les différentes composantes de $\vec{E}$ ne sont pas forcément en phase (voir III)

Les différents calculs deviennent alors très simples (attention aux signes suivant la convention choisie) :

$e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$

$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} = -i\vec{k}.\underline{\vec{E}}$$
$$\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$$
$$\vec{\Delta}\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$$
$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega\underline{\vec{E}}$$

$e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$

$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} = i\vec{k}.\underline{\vec{E}}$$
$$\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$$
$$\vec{\Delta}\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$$
$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega\underline{\vec{E}}$$

Application :
— Équations de Maxwell :

M.G et M.T $\boxed{-i\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \qquad -i\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}} \rightarrow \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$$ relation de structure

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k}\wedge\left(\frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}\right) = \frac{i\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$ relation de dispersion

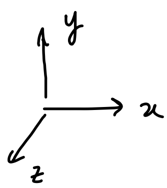
— Équation de propagation :

$$\vec{\Delta}\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow -k^2\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\left(-\omega^2\right)\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$ relation de dispersion

3. Aspects énergétiques

On prend par exemple :



$$\underline{\vec{E}} = E_o \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_y \; ; \; \underline{\vec{B}} = \frac{E_o}{c}\exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_z$$

Ce qui correspond aux champs réels :

$$\vec{E} = E_o \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y \; ; \; \vec{B} = \frac{E_o}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$$

On a alors :

$$< u_{el} > = < \frac{\varepsilon_o E^2}{2} > \Rightarrow < u_{el} > = \frac{\varepsilon_o E_o^2}{4}$$

$$< u >= 2 < u_{el} >= \frac{\varepsilon_o E_o^2}{2}$$

La notation complexe n'est pas adaptée pour les calculs de produits (non linéaire, on ferait apparaître des termes oscillant à 2ω). On peut par contre utiliser la notation complexe pour évaluer des valeurs moyennes :

$$< A.B >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{A}.\underline{B}^*)$$

Par exemple dans le cas du vecteur de Poynting :

$$< \vec{\Pi} >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_o}\right)$$

Soit :

$$< \vec{\Pi} >= \frac{E_o^2}{2\mu_o c}\vec{u}_x$$

Interprétation corpusculaire : on peut interpréter une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k}$ comme un flux de photons :

— d'énergie $E = \hbar\omega$;
— de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{k}$;
— se propageant à la vitesse c suivant la direction de propagation.

Par analogie avec le vecteur densité volumique de courant $\vec{j} = \rho_m\vec{v} = -ne\vec{v}$, on peut écrire :

$$< \vec{\Pi} >= n\ \hbar\omega c\ \vec{u}$$

On a ainsi :

$$n\hbar\omega c = \frac{E_o^2}{2\mu_o c} \Rightarrow n = \frac{\varepsilon_o E_o^2}{2\hbar\omega}$$ nb de photons par unité de volume

On aurait pu aussi écrire : $n\hbar\omega =< u >$. On peut faire l'application numérique dans le cas d'un laser He-Ne de puissance $10^3\mathrm{W.m^{-2}}$:

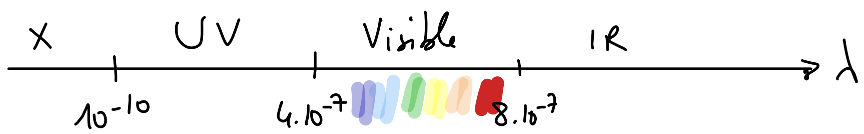
$\lambda = 632{,}8\,\mathrm{nm}$

$$\hbar\omega = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{\|\vec{\Pi}\|\ \lambda}{hc^2}$$

A.N : $n = \dfrac{10^3 \ .\ 6.10^{-7}}{6.10^{-34}\ (3.10^8)^2} = \dfrac{10^{-4}}{10^{-17}} = 10^{13}\ \mathrm{m^{-3}}$

↳ en diminuant la puissance de la source on peut réaliser des expériences "photon par photon" cf physique quantique.

Rappel : spectre EM



III. Polarisation des ondes électromagnétiques

On considère une OPPM se propageant suivant $\vec{u}_z$:

$$\vec{E} = E_{ox}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_{oy}\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{u}_y$$

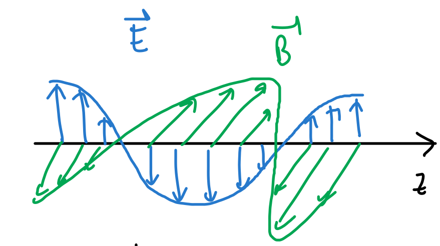
Définition : donner la polarisation de cette onde, c'est étudier la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ dans un plan orienté de sorte que l'observateur voie arriver l'onde vers lui. Si cette courbe est une droite, on parle de polarisation **rectiligne**, si c'est un cercle de polarisation **circulaire** et si c'est une ellipse de polarisation **elliptique**.

La lumière naturelle est non polarisée, elle devient polarisée par exemple après réflexion sur un dioptre.

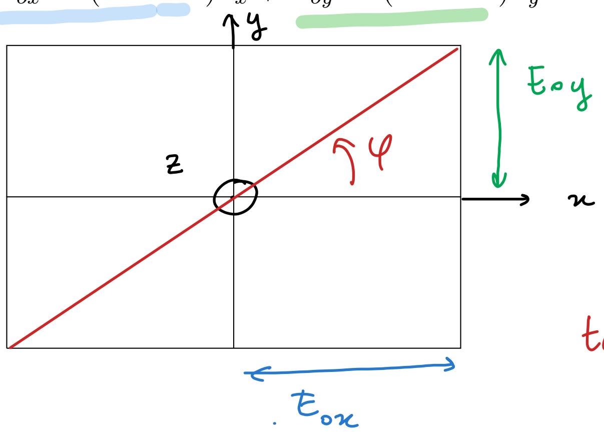
1. Polarisation rectiligne

- $E_{ox} = 0$: polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_y$ ou $E_{oy} = 0$: polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$
- $\varphi = 0$ ou π.

$$\vec{E} = E_{ox}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_{oy}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_y$$

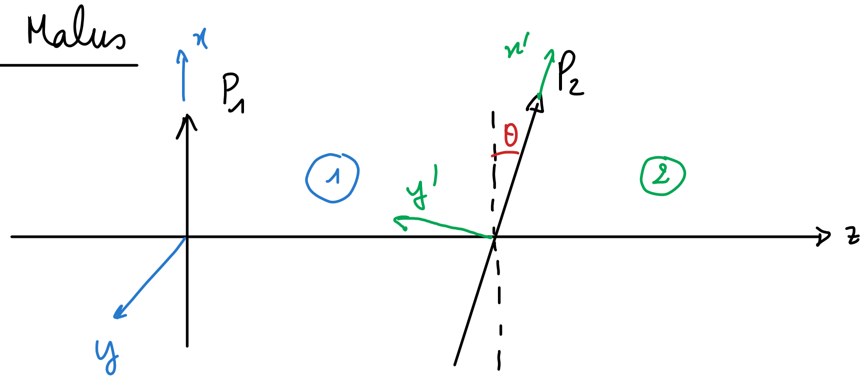


Représentation à t fixé



$$\tan\varphi = \frac{E_{oy}}{E_{ox}}$$

Théorème de Malus



① $\vec{E}_1 = E_0\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x = \left(\underbrace{E_0\cos\theta\,\vec{u}_{x'} + E_0\sin\theta\,\vec{u}_{y'}}\right)\cos(\omega t - kz)$

$$\langle\vec{\Pi}_1\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_z$$

$\Downarrow$

② $\vec{E}_2 = E_0\cos\theta\,\vec{u}_{x'}\cos(\omega t - kz)$

$$\langle\vec{\Pi}_2\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\cos^2\theta\,\vec{u}_z$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\|\langle\vec{\Pi}_2\rangle\| = \|\langle\vec{\Pi}_1\rangle\|\cos^2\theta}$

Théorème de MALUS

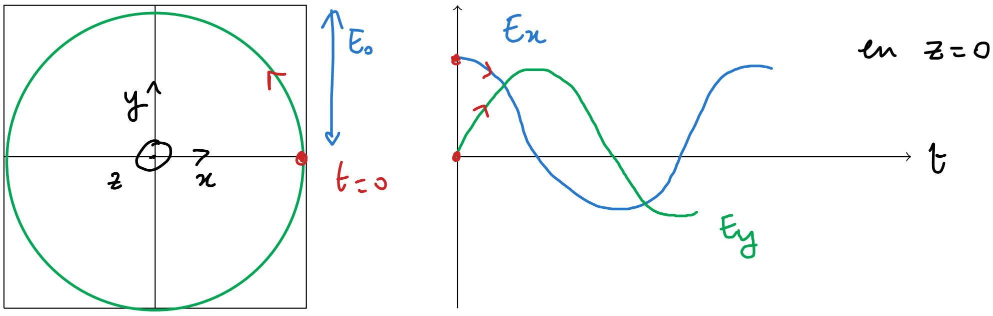
2. Polarisation circulaire

Pour obtenir une polarisation circulaire, il faut choisir :
- $E_{ox} = E_{oy} = E_o$;
- $\varphi = \pm\pi/2$

$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$

$E_y = E_0 \sin(\omega t - kz)$

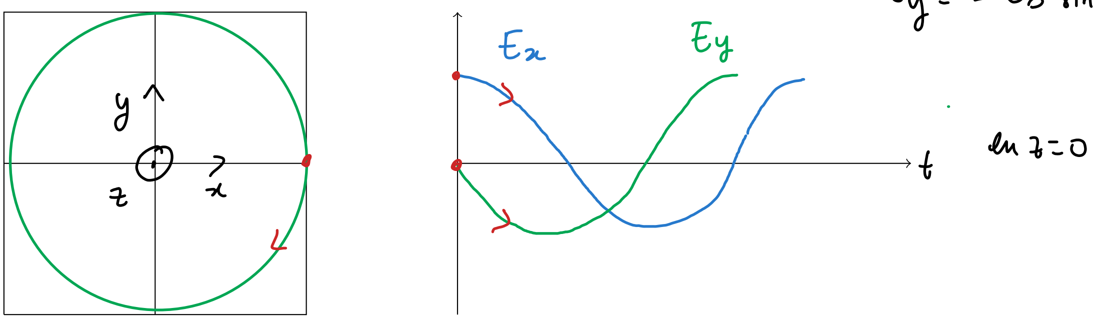
circulaire gauche



$E_x = E_0 \cos(\omega t)$

$E_y = -E_0 \sin(\omega t)$

circulaire droite



On a alors : $< E_x^2 > = < E_y^2 >$.