

Contrôle MPI 2023 physique 1

remarques / coquilles ... à envoyer à karim.helal@ac-lyon.fr

1) PFD d'un électron "moyen" dans (R) galiléen / poids négligé

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

NF: $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{E}$ (OPPH) et donc $\|\vec{B}\| \sim \frac{1}{\omega} \|\vec{E}\|$

et $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{v}{v_p}$ si $v \ll v_p$ alors on peut négliger la partie magnétique de la force de Lorentz \rightarrow on le supposera dans la suite.

et alors: $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$

2) en RSF: $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t}$ $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i\omega t}$ $\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow i\omega \vec{v}$

d'où: $\vec{v} = \frac{-\frac{e}{m} \vec{E}}{i\omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{-\frac{e\tau}{m} \vec{E}}{1 + i\omega\tau}$ $\vec{v}_0 = \frac{-\frac{e\tau}{m} E_0 \vec{e}_x}{1 + i\omega\tau}$

3) $\vec{j} = -n^* e \vec{v}$ car seuls les électrons sont mobiles. d'où

4) loi d'Ohm locale: $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$ où $\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$ avec $\sigma_0 = \frac{n^* e^2 \tau}{m}$

5) $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ si $\omega\tau \ll 1 \Leftrightarrow f \ll f_{\text{lim}} = \frac{1}{2\pi\tau} \sim 1,6 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$

6) NFC-RFID: $f = 1,4 \cdot 10^7 \text{ Hz} \ll f_{\text{lim}}$ (borderline grandeur) $\Rightarrow \vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ est une excellente approximation

7) (NA): $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ $\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} \sim \frac{\epsilon_0 \omega \|\vec{E}\|}{\sigma_0 \|\vec{E}\|} \sim \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma_0} \sim 1,0 \cdot 10^{-11} \ll 1$

on peut négliger le courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant le courant $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ dans l'aluminium à 14 MHz.

8) (NA) $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ \rightarrow on retrouve l'équation de (NA) de la statique / équation valable dans le cadre notamment de l'ARQS magnétique.

9) équation locale de conservation de la charge: $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. et $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ \oplus (NA) $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

d'où $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \rho = 0 \rightarrow$ cte de temps $\tau' = \frac{\epsilon_0}{\sigma_0}$ et

10) $\rho(n,t) = \rho(n,0) e^{-\frac{t}{\tau'}}$ $\rightarrow 0$ en ggs τ' et en RSF $(i\omega + \frac{1}{\tau'}) \rho = 0$ donc $\rho = 0$ en RSF / $\tau' \sim 2 \cdot 10^{-19} \text{ s} !!$

on peut ainsi considérer le conducteur comme neutre et $\text{div}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow -i\omega \epsilon_0 \vec{E} = 0$ (TE).

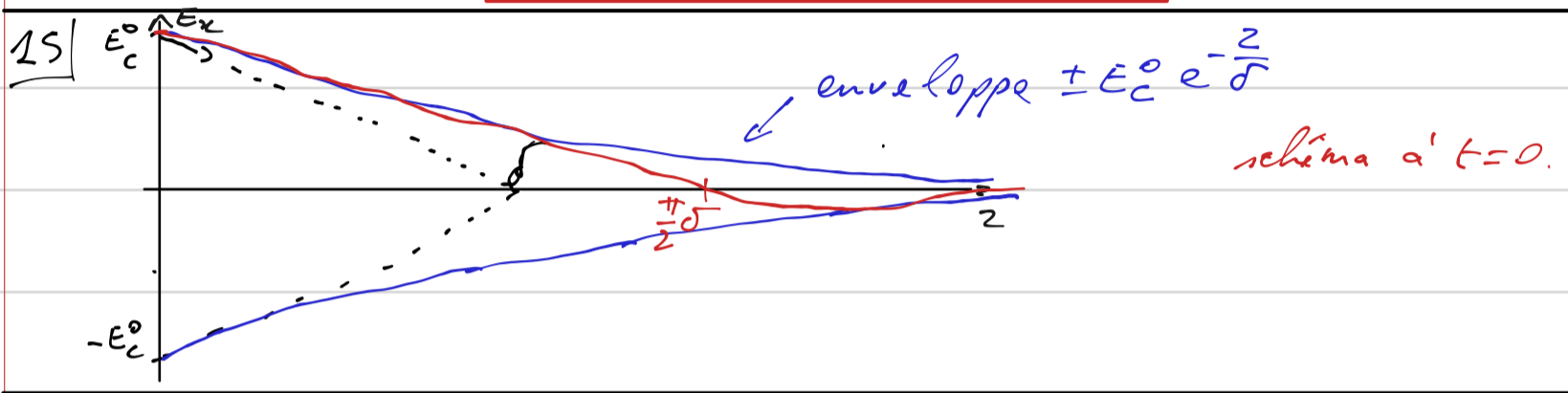
11) (NA) $\text{rot}(\text{rot}(\vec{B})) = \mu_0 \sigma_0 \text{rot}(\vec{E}) \stackrel{(NF)}{=} -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{rot}(\text{rot}(\vec{B})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{B})) - \Delta \vec{B}$ $\stackrel{(NF)}{=} 0$
on a bien $\Delta \vec{E} - \frac{1}{D} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ où $D = \frac{1}{\mu_0 \sigma_0}$ $[D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

12] $\Delta \vec{E}_c = -k_c^2 \vec{E}_c / \frac{\partial \vec{E}_c}{\partial t} = i\omega \vec{E}_c$ d'où $k_c^2 = -i\omega \mu_0 \sigma_0$

13] $k_c^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \mu_0 \sigma_0 \omega \Rightarrow k_c = \pm e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\mu_0 \sigma_0 \omega} = \pm (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}}$

propagation selon $+\vec{u}_z \Rightarrow \text{Re}(k_c) > 0$ soit $k_c = \frac{1-i}{\delta}$ où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$

14] on injecte k_c dans l'expression de \vec{E}_c : $\vec{E}_c = E_c^0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{u}_x$ on prend la partie réelle.
 $\vec{E}_c(z,t) = E_c^0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) \vec{u}_x$



16] δ : profondeur de peau: distance caractéristique d'atténuation de l'onde dans le conducteur. il n'y a plus d'onde au delà de $99\% \delta$ AN: $\delta = 22 \mu m$ pour l'aluminium à 14 MHz .

17] $\vec{E}_r = E_{0r} \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$ ne propage dans la direction $-\vec{u}_z$.

18] \vec{E} et \vec{B} continus à l'interface $z=0$ (schématisation volumique / $\epsilon_r=1$ pour conducteur, $\mu_r=1$)
 d'où $E_{0i} + E_{0r} = E_{0c}$ (continuité de \vec{E} en $z=0$). soit $1 + r = t$ (2)

19] $\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_{0i}}{c} = \frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$ / $\vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = -\frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y$
 OPPH / vide.
 et $\vec{B}_c = \frac{k_c \wedge \vec{E}_c}{\omega} = \frac{(1-i)}{\omega \delta} E_{0c} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{u}_y$
 (NF) / OPPH $k = \frac{\omega}{c}$ OPPH vide

20] la continuité de \vec{B} en $z=0$ s'écrit: $\frac{E_{0i}}{c} - \frac{E_{0r}}{c} = \frac{(1-i)}{\omega \delta} E_{0c}$ soit $1 - r = \frac{(1-i)}{k\delta} t$ (2)

21] (1)+(2) $\Rightarrow 2 = t \left(1 + \frac{1-i}{k\delta}\right) = t \left(\frac{k\delta + 1 - i}{k\delta}\right)$ et $t = \frac{2k\delta}{k\delta + 1 - i}$ ok!

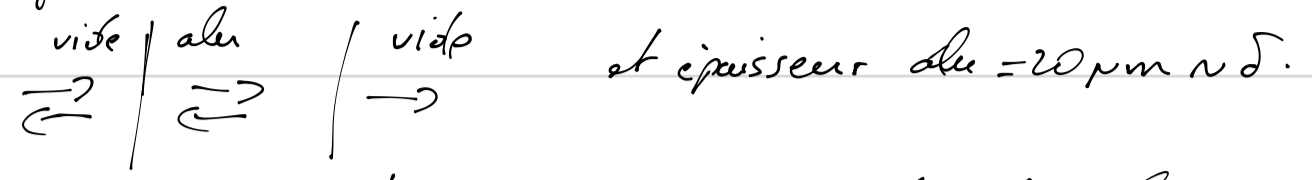
puis $r = t - 1 = \frac{k\delta - 1 + i}{k\delta + 1 - i}$ ok!

22] conducteur parfait: $k\delta \rightarrow \infty \Rightarrow t = 0$ et $r = -1$ l'onde est totalement réfléchi. protection des données parfaite!

23] $|r|^2 = \frac{(k\delta - 1)^2 + 1}{(k\delta + 1)^2 + 1} \Rightarrow T = 1 - |r|^2 = \frac{(k\delta + 1)^2 - (k\delta - 1)^2}{(k\delta + 1)^2 + 1} = \frac{4k\delta}{(k\delta + 1)^2 + 1}$

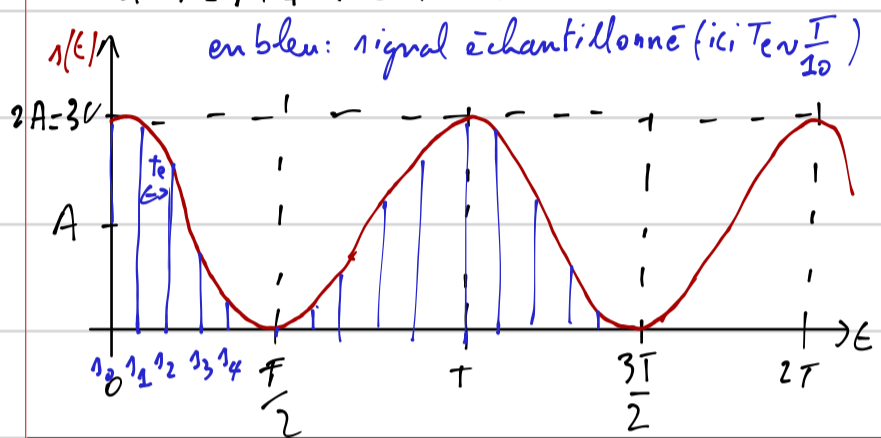
AN: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = 0,29 \text{ m}^{-1} / k\delta = 6,4 \cdot 10^{-6} \ll 1 \Rightarrow T \approx 2k\delta$ (OK en $k\delta$) $T \approx 1,3 \cdot 10^{-5} \ll 1$.

23) suite: pour une feuille d'aluminium c'est plus compliqué car 2 interfaces.



on peut faire une analogie avec barrière épaisse pour effet tunnel en quantique et facteur de transmission global $T_{tot} \approx T^2 e^{-\frac{2a}{\delta}} \approx 3 \cdot 10^{-11} \ll 1$.
l'écrantage par une feuille d'aluminium pour $f \approx 14 \text{ THz}$ est excellent!

24) $s(t) = A + A \cos(\omega t)$ où $A = 1,5 \text{ V}$. ($\cos(\omega t)$ varie entre $+1$ et -1).
en bleu: signal échantillonné (ici $T_e = \frac{1}{10}$) (pas de phase à l'origine qu'il te à décaler l'origine)



échantillonnage à période $T_e = \frac{1}{f_e}$:
→ on transforme le signal $s(t)$ en une suite de valeurs discrètes $s_n = s(n T_e)$. $n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{Z}$.

25) rôle du condensateur: maintenir le signal $v_{ech}(t)$ constant sur l'intervalle $[n T_e, (n+1) T_e[$ ce qui facilite son utilisation ultérieure → par exemple la numérisation.

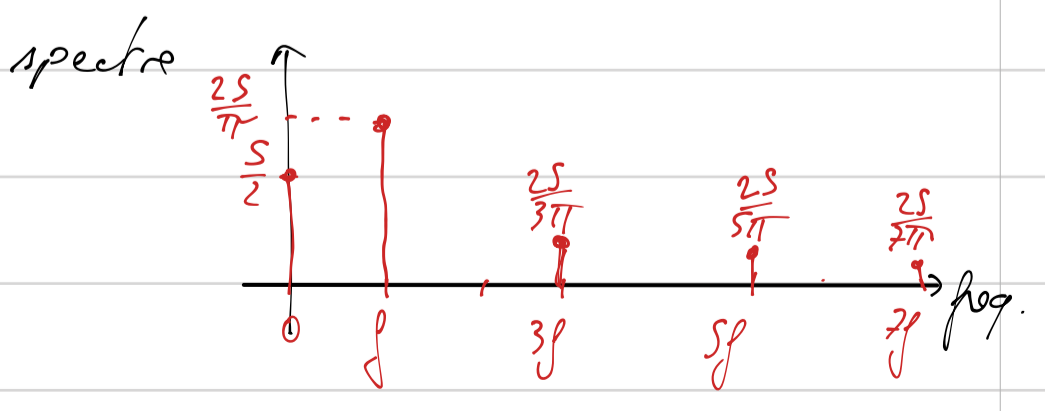
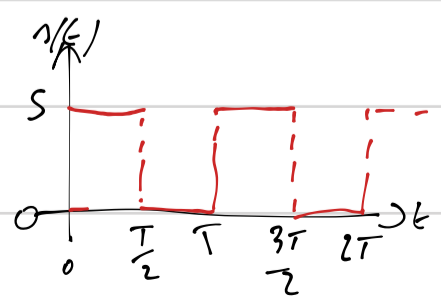
26) ici $T_e = 1,0 \text{ ms}$ et durée du pic $\tau_{pic} = \alpha T_e = 20 \text{ ns}$.

27) que dire si ce n'est qu'en a bien un signal échantillonné ⊕ le blocage à s_n pendant $[n T_e, (n+1) T_e[$ grâce au condensateur. (chaque plateau est bien de durée $T_e = 1 \text{ ms}$ soit 20 millions sur 20ms)

28) le spectre du signal échantillonné est le spectre du signal $s(t)$ périodisé:
toute harmonique de fréquence f du signal se retrouve à $\pm f; f_e \pm f; 2f_e \pm f; \dots$
dans le signal échantillonné.

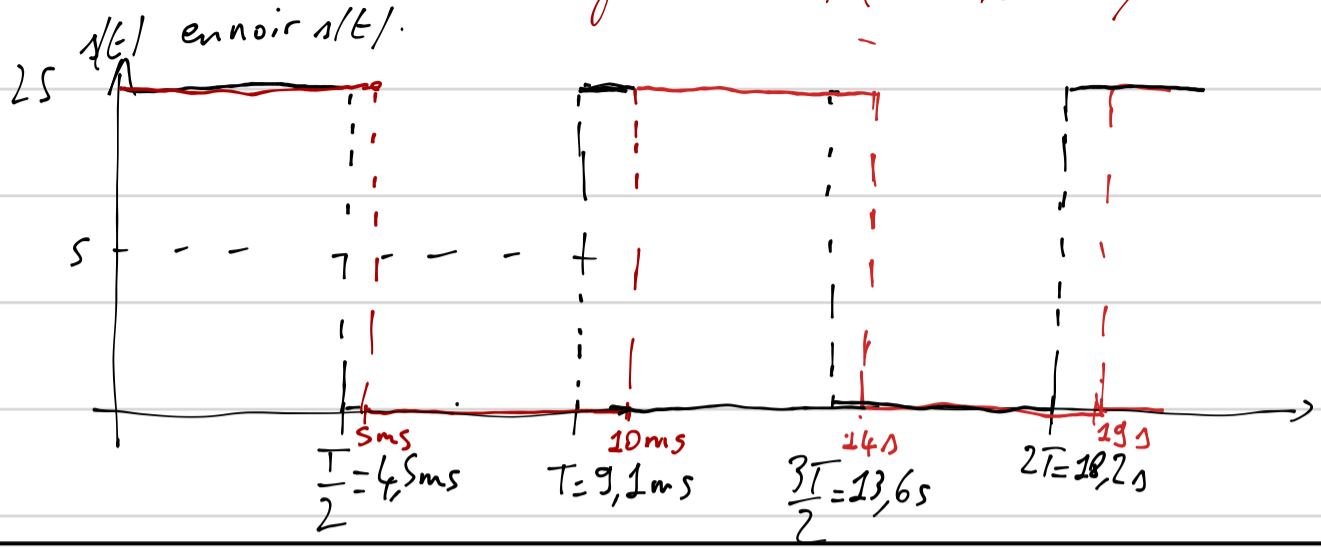
ainsi: $900 \text{ Hz} \rightarrow$ correspond à $f_e - f$ $1900 \text{ Hz} \Leftrightarrow 2f_e - f$ $2900 \text{ Hz} \Leftrightarrow 3f_e - f$
 $1100 \text{ Hz} \rightarrow$ ————— à $f_e + f$ $2100 \text{ Hz} \Leftrightarrow 2f_e + f$ $3100 \text{ Hz} \Leftrightarrow 3f_e + f$

29) à la calculatrice, on reconnaît un signal carré avec offset



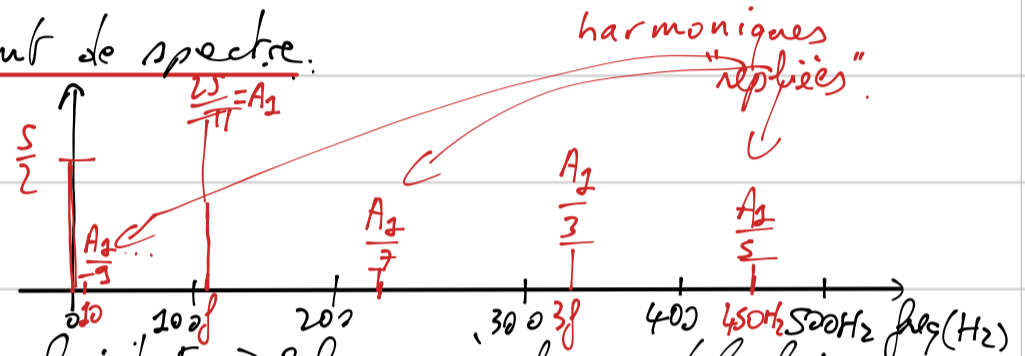
30) ici $T = 9,1 \text{ ms}$

en rouge $V_{ech}(t)$ (on suppose qu'il a démarré à $t=0$)



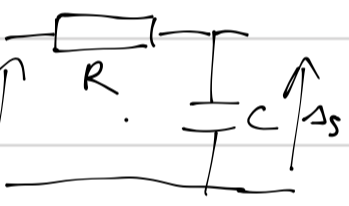
31) on verrait apparaître du repliement de spectre.

- harmonique 5 à $1000 - 550 = 450 \text{ Hz}$
- harmonique 7 à $1000 - 770 = 230 \text{ Hz}$
- ... 9 à $1000 - 990 = 10 \text{ Hz}$...
- etc...



pour y remédier: critère de Shannon: on choisit $f_e > 2 f_{max}$ où f_{max} est la fréquence maximale présente dans le spectre de $s(t)$.

32) passe bas du premier ordre: de pulsation de coupure ω_c



$$H = \frac{s_s}{s_e} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = H$$

33) $\omega_c = \frac{1}{RC}$

34) ainsi $s_s (1 + \frac{j\omega}{\omega_c}) = s_e$ soit $s_s(t) + \frac{1}{\omega_c} \frac{ds_s}{dt} = s_e$. $\tau = \frac{1}{\omega_c}$ $s_s(t) + \tau \frac{ds_s}{dt} = s_e(t)$

- 35) (1) échantillonneur ⊕ Convertisseur analogique numérique.
 (2) convertisseur numérique analogique (⊕ linage passe bas).

36) avantages: * souple: on peut modifier les paramètres du filtre sans modifier le circuit électronique lui-même (les composants).
 * pas de problèmes d'associations de filtres.

inconvénients: * ne convient pas pour un filtre de puissance.
 * complexité (échantillonnage / CAN/CNA...)

37) $\frac{ds_s}{dt} = \frac{s_s(n+1) - s_s(n)}{T_e}$ d'où $s_s(n) + \frac{1}{\omega_c T_e} (s_s(n+1) - s_s(n)) = s_e(n)$ soit

38) $s_s(n+1) = (1 - \omega_c T_e) s_s(n) + \omega_c T_e s_e(n)$

39) il faut fournir $s_s(0)$ c.a.d. la condition initiale.

et $\omega_c T_e = \frac{T_e}{\tau}$

40) les cis d'enfants semblent surtout présents au delà de 2000Hz → par exemple
filtrer avec un passe bas d'ordre 1 où $f_c \sim 1\text{kHz}$ soit $\omega_c \sim 6.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$.

41).

$f_c = 1000$. # fréquence de coupure

$\beta = 2 * n_p * \pi * f_c / f_e$ # $\omega c T_e$

$\alpha = 1.0 - \beta$ #

$N = \text{len}(S_e)$.

$S_s = n_p \cdot \text{zeros}(N)$

$S_s[0] = S_e[0]$.

for i in range (N-1):

$S_s[i+1] = \alpha * S_s[i] + \beta * S_e[i]$.

42) $r \gg a$: approximation dipolaire (grande distance).

$d \gg a$: on peut approximer le retard vrai $\frac{r}{c}$ par un retard moyen $\frac{r}{c} = \frac{0r}{c}$.

43) $\vec{p}'(t) = qz(t)\vec{u}_z$.

44) $p(t) = qz(t) = qa \sin(\omega t) \Rightarrow I(t) = \frac{1}{2a} (qa\omega) \cos(\omega t) = + \frac{q\omega}{2} \cos(\omega t)$ soit $I_0 = \frac{q\omega}{2}$

45) $\Pi(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} (-qa\omega^2 \sin(\omega t))^2 = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4 \sin^2(\omega t)}{6\pi c}$ $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$

et $P_r = \langle \Pi(t) \rangle = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{12\pi c}$ $P_r = \frac{\mu_0 a^2 \omega^2}{3\pi c} \left(\frac{q\omega}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} R_r I_0^2$

46) $R_r = \frac{2}{3} \frac{\mu_0 a^2 \omega^2}{\pi c} = \frac{8\pi}{3} \frac{\mu_0 c}{\omega^2} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$

verification homogénéité: $[R_r] = \frac{H.m^{-2} * m^2 s^{-2}}{m.s^{-1}} = H.s^{-1} = \Omega$ oh!

et $[R_i] = [L \frac{di}{dt}] \Rightarrow H.s^{-1} = \Omega$.

47) définir R_r permet de comparer les "antennes" entre elles.

48) 4G: $h_{4G} = 4\text{cm}$ $\lambda_{4G} = \frac{c}{f} = \frac{3.10^8}{8.10^8} \sim 38\text{cm}$ } dans les deux cas l'approximation
5G: $h_{5G} = 1\text{cm}$ $\lambda_{5G} = \frac{3.10^8}{35.10^8} \sim 8\text{cm}$ } $h \ll \lambda$ est correcte!

zone de rayonnement: il faut être à plusieurs mètres pour la 4G alors qu'un mètre est largement suffisant pour la 5G.

49) $\frac{8\pi \mu_0 c}{3} = 3,2k\Omega$. 4G: $\frac{a}{\lambda} = \frac{2}{37,5} \Rightarrow R_r = 9\Omega$.
 5G: $\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{17} \Rightarrow R_s = 11\Omega$

↗ valeurs très voisines.

50) $\vec{E}_r = E_{or} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x$

CL: annulation de $(\vec{E}_i + \vec{E}_r)$ sur le conducteur parfait car tangentiel:

$(\vec{E}_i + \vec{E}_r)(z=L) \cdot \vec{u}_x = 0$ soit

$E_{oi} e^{-ikL} + E_{or} e^{ikL} = 0 \Rightarrow E_{or} = -E_{oi} e^{-2ikL}$

51) $\vec{E}_{tot} = E_{oi} e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz} e^{-2ikL}) \vec{e}_x$ on factorise par l'arc moitié e^{-ikL} .
 $\vec{E}_{tot} = E_{oi} e^{i(\omega t - kL)} (e^{ik(L-z)} - e^{-ik(L-z)}) \vec{e}_x$
 $2i \sin(k(L-z))$

partie réelle de \vec{E}_{tot} .

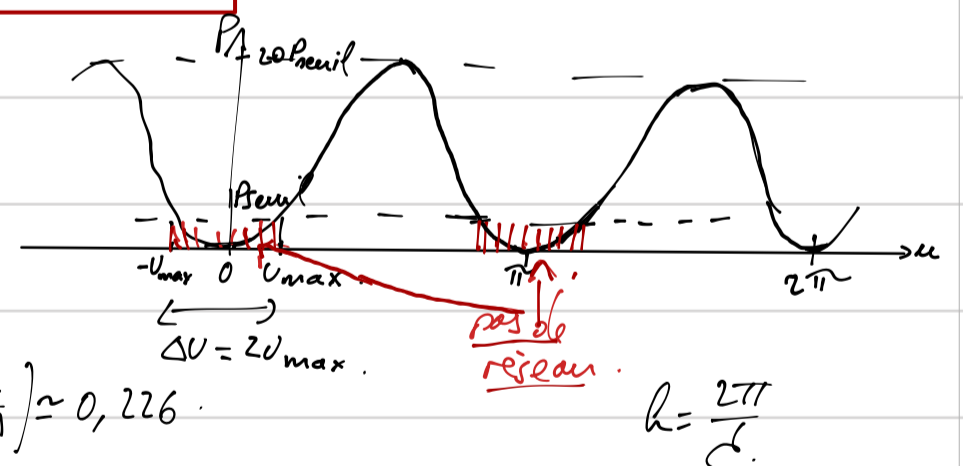
$\vec{E}_{tot} = 2E_{oi} \sin(\omega t - kL) \sin(k(z-L)) \vec{e}_x$

il s'agit d'une onde stationnaire (car variables spatiales et temporelles séparées).

52) $P = K \langle E_{tot}^2 \rangle = 4K E_{oi}^2 \langle \sin^2(\omega t - kL) \sin^2(k(z-L)) \rangle = 2K \cdot E_{oi}^2 \sin^2(k(z-L))$ moyenne spatiale
 Preuil = $\frac{1}{10} \times 2K E_{oi}^2 \sin^2(k(z-L))$

soit $P_{preuil} = \frac{K E_{oi}^2}{10}$ ainsi $P = 20 P_{preuil} \sin^2(k(z-L))$

posons $u = k(z-L)$



$U_{max} / \sin^2(U_{max}) = \frac{1}{20}$
 $\sin(U_{max}) = \frac{1}{\sqrt{20}} \Rightarrow U_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right) \approx 0,226$

$\Delta u = 2U_{max} = 0,45 \Rightarrow k \Delta z_{pas de réseau} = 0,45 \Rightarrow \Delta z_{pdr} = \frac{\lambda \times 0,45}{2\pi} = 6,1 \text{ mm}$

et $\Delta t_{pdr} = \frac{\Delta z_{pdr}}{v} \Rightarrow \Delta t_{pieton} = 7,4 \text{ ms}$ $\Delta t_{voiture} = 0,44 \text{ ms}$ obstacles de part et d'autre du réseau.

dans les deux cas $\frac{1}{\Delta t}$ est dans le spectre audible \Rightarrow gêne importante de la communication.

53) $\Delta t = \frac{2(L-z)}{c} \Rightarrow (L-z) = \frac{c \Delta t}{2} \approx 75 \text{ m}$. odg ok. (facteur 2 car aller-retour)

54) $\omega \rightarrow \omega + \Delta\omega \Rightarrow k \rightarrow k + \Delta k$. on a $k(L-z) = n\pi$.
 $(k + \Delta k)(L-z) = n\pi + U_{max}$ (U_{max} défini Q52).

54) suite: ainsi $\Delta h_{\min}(L-2) = v_{\max}$. soit $\frac{\Delta \omega_{\min}(L-2)}{c} = v_{\max}$.

et $\frac{L-2}{c} = \frac{\Delta t}{2}$ $\Delta \omega = 2\pi \Delta f$ d'où $\Delta f_{\min} \Delta t = \frac{v_{\max}}{2\pi} = 7,2 \cdot 10^{-2}$

ou encore $\Delta f_{\min} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Hz}$

55) on peut éviter la perte de réseau en utilisant plusieurs porteuses de fréquences voisines dont les "trous" ne se superposent pas.

