

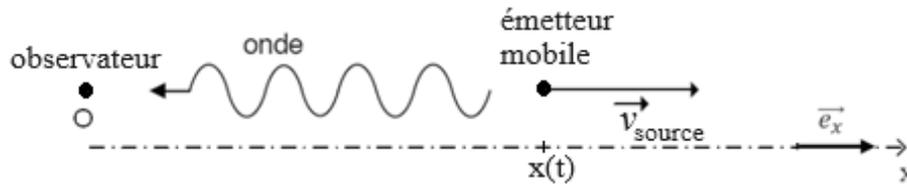
## Corrigé Centrale-Supélec épreuve Physique-Chimie 1 MPI 2024

*Corrigé proposé par Laurent Millet et Julien Le Berre, pour toute remarque : laurent.millet@ac-nantes.fr*

### I Voir l'univers en infrarouge

#### I.A - Décalage vers le rouge

Q1. On représente la situation :



Initialement, l'émetteur émet un pic à une distance  $d$  de l'observateur. L'onde se propage à la célérité  $c$  et arrive à l'instant  $t_1$  :

$$t_1 = \frac{d}{c}$$

Q2. A l'instant  $t = T_0$ , l'émetteur se situe à l'abscisse  $x(T_0) = d + vT_0$  et émet un nouveau pic. Le pic arrive à l'instant  $t_2$  :

$$t_2 = T_0 + \frac{d + vT_0}{c}$$

Q3. On en déduit la fréquence mesurée par l'observateur, égal à l'inverse de la période correspondant à l'intervalle de temps entre 2 pics reçus :

$$f_{mes} = \frac{1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{T_0 + \frac{v}{c}T_0}, \text{ soit } f_{mes} = \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c}}$$

Q4. On en déduit la longueur d'onde mesurée par l'observateur :

$$\lambda_{mes} = \frac{c}{f_{mes}} = \frac{c}{f_0} \times \left(1 + \frac{v}{c}\right), \text{ soit } \lambda_{mes} = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Q5.  $z$  est le rapport de deux longueurs, c'est une grandeur **sans dimension**.

Q6. Comme l'émetteur s'éloigne de l'observateur, on a  $v > 0$ , et donc  $\lambda_{mes} > \lambda_0$ . La longueur d'onde mesurée par l'observateur augmente et se décale vers le rouge.

Des astres émettant de la lumière dans le visible, voient leur spectre se décaler vers le rouge et l'infrarouge, à cause de cet effet Doppler. Grâce à son maximum de sensibilité dans l'infrarouge, le JWST va pouvoir détecter des astres s'éloignant rapidement de lui.

Q7. On en déduit l'expression de  $z$  :

$$z = \frac{\lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) - \lambda_0}{\lambda_0}, \text{ soit } z = \frac{v}{c}$$

Q8. On se place dans le cas où  $v \ll c$  et on effectue un développement limité à l'ordre 1 de  $z$  en  $\frac{v}{c} \ll 1$  :

$$z + 1 = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \simeq \left(1 + \frac{v}{2c}\right) \left(1 + \frac{v}{2c}\right) \simeq 1 + \frac{v}{c}, \text{ soit } z \simeq \frac{v}{c}$$

en conservant les termes d'ordre 1. On retrouve bien le résultat précédent.

On pourra supposer que cette approximation est valable si  $v < \frac{c}{10}$ , ce qui correspond à un intervalle  $0 \leq z \leq 0,1$ .

## I.B - Loi de Hubble

**Q 9.** On lit dans les résultats du script la moyenne  $\bar{H} = 812 \text{ km.Mpc}^{-1}.\text{s}^{-1}$  et l'écart-type  $\sigma(H) = 1989 \text{ km.Mpc}^{-1}.\text{s}^{-1}$ . On calcule l'incertitude-type sur la moyenne (évaluation de type A) :

$$u(H) = \frac{\sigma(H)}{\sqrt{24}} = 406 \text{ km.Mpc}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

On écrit le résultat sous forme normalisée, en conservant 2 chiffres significatifs pour l'incertitude-type :

$$H = (8,1 \pm 4,1) \times 10^2 \text{ km.Mpc}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

**Q 10.** Si l'on considère que la vitesse de récession des galaxies est constante au cours du temps, alors la distance parcouru  $d$  à la date  $t$  vaut :  $d(t) = v \times t$ . On en déduit une estimation de l'âge de l'univers  $t$  :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{1}{H}$$

*Remarque : La formulation « en expansion continue » n'est pas clairement définie dans l'énoncé. Nous avons choisi de supposer que cela correspond à une vitesse de récession constante au cours du temps.*

**Q 11.** AN :  $t = \frac{1}{802.10^3 \times \frac{1}{3,08.10^{22}}} = 3,8.10^{16} \text{ s}$ , soit  $t = 1,2$  milliards d'années. Cette valeur est bien inférieure à la valeur attendue (facteur 10 d'écart), lié à l'erreur d'évaluation de la constante de Hubble.

**Q 12.** L'outil de régression linéaire est utilisé pour réaliser une modélisation **affine** de données. La loi de Hubble est une relation **linéaire** (ordonnée à l'origine nulle). L'outil de régression linéaire n'est donc pas adapté à l'exploitation de cette loi, ce que l'on peut constater en voyant la valeur de l'ordonnée à l'origine fourni par le script. La méthode avec le calcul de la valeur moyenne est la plus adaptée.

*Remarque : Nous ne sommes pas certain de ce qu'entend l'énoncé avec la formulation « le plus pertinent du point de vue de la démarche scientifique ». De plus, il est difficile de comparer une méthode avec traitement des incertitudes (figure 3), d'une méthode sans traitement des incertitudes (figure 4).*

**Q 13.** *Remarque : L'énoncé ne précise pas si on utilise l'expression classique ou relativiste de  $z$ . On constatera, dans la question 14, que les valeurs de  $z$  sont inférieures à 0.1, ce qui justifie l'utilisation de l'expression classique.*

En reprenant l'expression de la question 7,  $z = v/c$ , on exprime la loi de Hubble :

$$zc = Hd$$

**Q 14.** *Remarque : Il y a plusieurs manières d'exploiter les données fournies. En situation de concours, un candidat aurait tout intérêt à n'exploiter qu'une seule valeur de la figure 5, par exemple le pic le plus intense  $H_\alpha$ , ce que nous ferons dans ce corrigé. Bien entendu un traitement statistique avec l'ensemble des données serait plus approprié, et permettrait notamment de faire une évaluation des incertitudes, ce qui n'est pas demandé dans l'énoncé.*

On détermine la valeur de  $z$  pour le pic le plus intense  $H_\alpha$  :

$$z = 0,062$$

Sa valeur inférieure à 0.1 nous permet de conserver l'expression classique de  $z$ . En utilisant la loi de Hubble, on trouve :  $d = \frac{zc}{H} = 275 \text{ Mpc}$ , soit  $d = 896.10^6 \text{ al}$

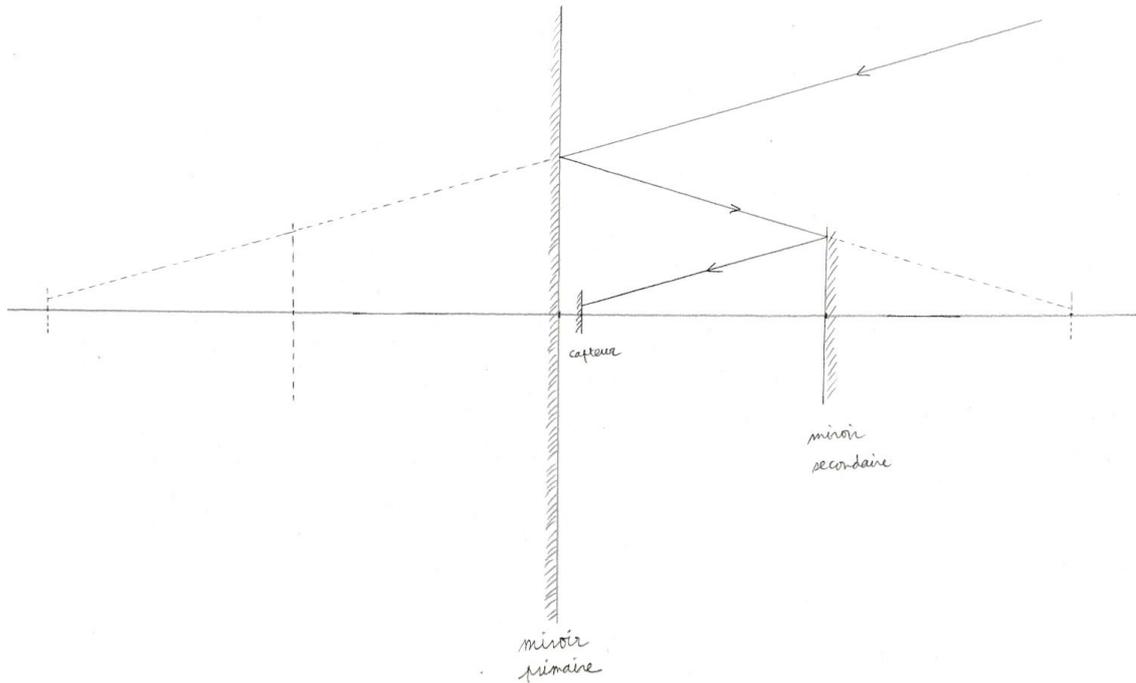
## Les miroirs

### II.A - Optique du télescope

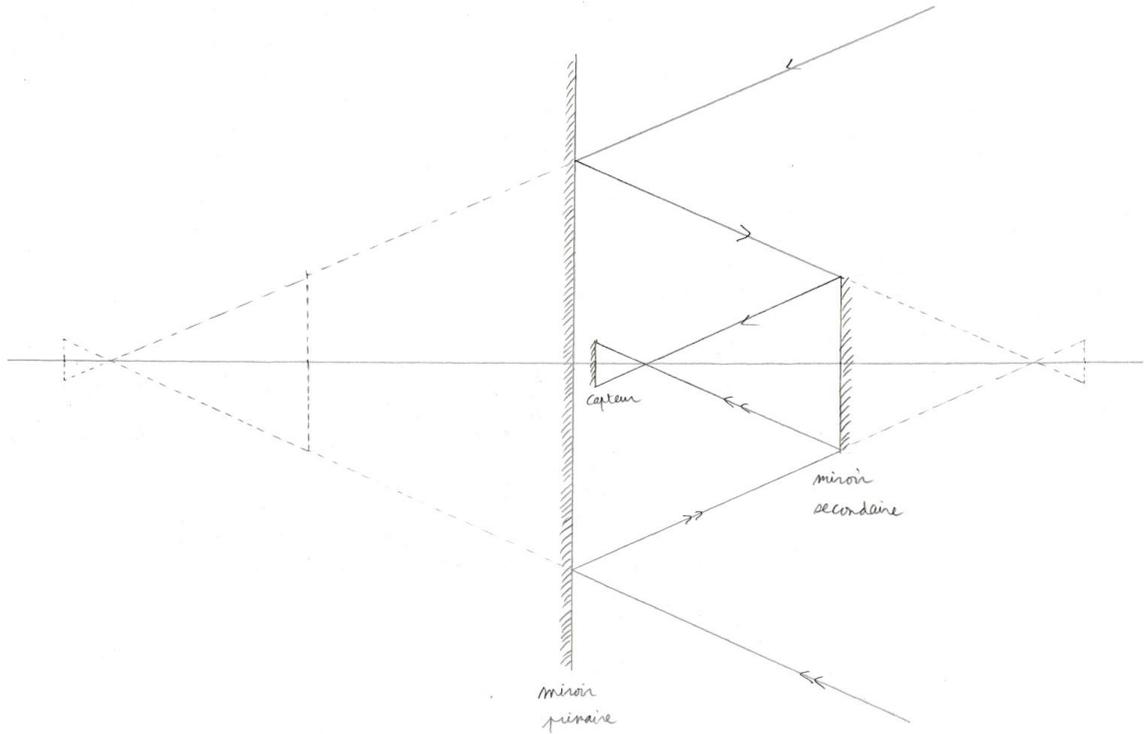
**Q 15.** Pour qu'un système optique centré soit éclairé dans les conditions de Gauss, il faut l'éclairer avec des **rayons paraxiaux** :

- rayons proches de l'axe optique,
- rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique,
- angles d'incidences faibles sur les dioptries rencontrés.

**Q 16.** On commence par construire l'image du miroir secondaire par le miroir primaire, puis l'image du capteur par le miroir secondaire. On peut alors tracer le parcours d'un rayon lumineux venant de l'infini et atteignant le capteur.



**Q 17.** On commence par déterminer graphiquement sur la figure 7 la distance entre le miroir primaire et le miroir secondaire. A l'aide d'une règle de proportionnalité, on trouve une distance  $d = 8$  m. Le champ de vision du capteur est le domaine de l'espace objet dont les rayons atteignent le capteur. Le miroir primaire étant très grand, il ne limite pas le champ de vision du télescope. On délimite ce champ de vision par les rayons extrêmes les plus inclinés. Ces rayons touchent l'extrémité haute (resp. basse) du miroir secondaire et l'extrémité basse (resp. haute) du capteur.



En assimilant la distance capteur-miroir secondaire à la distance  $d$ , on détermine l'angle d'inclinaison  $\alpha$  de ces rayons extrêmes :

$$\tan(\alpha) \simeq \alpha = \frac{D_2/2 + R_3}{d}$$

AN :  $\alpha = 0,05 \text{ rad} = 172'$ . Le champ de vision est donc défini par l'angle  $2\alpha = 344'$ .

Cette valeur est nettement supérieure à celle fournie dans l'énoncé, la raison principale résidant dans la modélisation grossière de télescope à l'aide de miroir plan.

*Remarque :* Avec la modélisation en miroirs plans, il existe une « zone d'ombre » pour des rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique. Ces rayons n'atteindront pas le capteur et seront occultés par le miroir secondaire. Bien entendu en réalité, la concavité des miroirs ne conduit pas à ce problème.

## II) Les miroirs

### II. B) Le rayonnement thermique des instruments

#### II. B. 1) Le rayonnement d'équilibre thermique et la loi de Planck

Q18. On utilise la relation  $d\mathcal{E} = u(\nu)Vd\nu$

$$[u] = \frac{[\mathcal{E}]}{[V][\nu]} = J \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1} = J \cdot m^{-3} \cdot s = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-3}$$

Q19.  $\epsilon = h\nu$

Q20.  $\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{\lambda_{\max}} \stackrel{AN}{=} \frac{2,9979 \times 10^8}{28 \times 10^{-6}} = 1,1 \times 10^{13} \text{ Hz}$

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{c}{\lambda_{\min}} \stackrel{AN}{=} \frac{2,9979 \times 10^8}{0,6 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Q21. On somme  $d\mathcal{E}$  sur l'intervalle  $[\nu_1, \nu_2]$

$$\mathcal{E}_{12} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} u(\nu)Vd\nu = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} Vd\nu = \frac{8\pi h}{c^3} V \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu$$

On effectue le changement de variable  $\xi = \frac{h\nu}{k_B T}$

$$\mathcal{E}_{12} = V \frac{8\pi h}{c^3} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\left(\frac{k_B T}{h} \xi\right)^3 \frac{k_B T}{h}}{\exp(\xi) - 1} d\xi = V \frac{8\pi k_B^4 T^4}{c^3 h^3} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^3}{\exp(\xi) - 1} d\xi = V \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} I_{[\xi_1, \xi_2]}$$

Q22. L'énergie du rayonnement  $d\mathcal{E}$  correspond à celle de  $dN$  photons d'énergies comprises dans la bande de quantum  $[h\nu, h\nu + d(h\nu)]$ , on en déduit

$$N_{12} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{u(\nu)}{h\nu} Vd\nu = \frac{8\pi h}{hc^3} V \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu$$

En effectuant le même changement de variable qu'en Q21, on obtient

$$N_{12} = V \frac{8\pi h}{hc^3} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\left(\frac{k_B T}{h} \xi\right)^2 \frac{k_B T}{h}}{\exp(\xi) - 1} d\xi = V \frac{8\pi h}{hc^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2}{\exp(\xi) - 1} d\xi$$

$$N_{12} = V \frac{8\pi k_B^3 T^3}{h^3 c^3} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2}{\exp(\xi) - 1} d\xi = V \frac{8\pi k_B^3 T^3}{h^3 c^3} J_{[\xi_1, \xi_2]}$$

Q23. L'énergie moyenne des photons contenus dans la cavité vaut

$$\bar{\epsilon} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{N_{12}} = k_B T \frac{I_{[\xi_1, \xi_2]}}{J_{[\xi_1, \xi_2]}} \propto T$$

L'énergie moyenne des photons présents dans la cavité est **proportionnelle à la température**.

## II. B. 2) Réduction du rayonnement par refroidissement

- Q24. On nous indique qu'une petite ouverture pratiquée dans la paroi de la cavité précédente perturbe très peu l'équilibre thermodynamique interne, il en résulte que le flux sortant par cette ouverture sera proportionnel à la surface de l'ouverture ainsi qu'à la densité volumique d'énergie électromagnétique présente dans la cavité. Comme cette dernière est proportionnelle à  $T^4$  d'après la question Q 21., il en est de même pour le rayonnement émis par un corps noir à la température  $T$ , ainsi que par tous les éléments du télescope puisqu'ils sont, par hypothèse de l'énoncé, assimilables à des corps noirs (rem : on peut précisément montrer que la densité spectrale de flux surfacique thermique est égale à  $\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{c}{4}u(\nu)$ ).
- Q25. Les puissances émises par un même élément du télescope à deux températures différentes sont donc dans un rapport égal au rapport des puissances quatrième des températures

$$\frac{P(39\text{ K})}{P(333\text{ K})} = \left(\frac{39}{333}\right)^4 \stackrel{AN}{=} 1,9 \times 10^{-4} = \frac{1}{5,3 \cdot 10^3}$$

Le rayonnement est réduit d'un facteur de l'ordre de 5000.

- Q26. D'après les questions Q22 et Q23, la population de photons varie en  $T^3$  alors que l'énergie moyenne des photons varie en  $T$ . La puissance émise étant proportionnelle à ces deux grandeurs, **c'est la réduction du nombre de photons émis qui a le plus d'influence sur la puissance émise.**

## III) Point de Lagrange $L_2$

- Q27. Le référentiel  $\mathcal{R}_h$  est couramment appelé **référentiel héliocentrique**.
- Q28. On qualifie un référentiel de galiléen lorsque le principe de l'inertie s'y applique (et que le principe fondamental de la dynamique ne nécessite pas l'introduction de forces d'inertie). Il en résulte que deux référentiels galiléens quelconques sont nécessairement en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. Or, le référentiel  $\mathcal{R}$  n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel héliocentrique  $\mathcal{R}_h$  qui est supposé galiléen, **le référentiel  $\mathcal{R}$  n'est donc pas galiléen.**
- Q29. Dans  $\mathcal{R}$ , le télescope JWST est soumis aux forces d'inertie en plus des forces d'interaction gravitationnelle. Le bilan détaillé des forces est :
- Force de gravitation du Soleil sur le télescope :  $\vec{F}_S = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{(d_{TS} + r_{L_2})^2} \vec{e}_x$ ,
  - Force de gravitation de la Terre sur le télescope :  $\vec{F}_T = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{r_{L_2}^2} \vec{e}_x$ ,
  - Force d'inertie d'entraînement :  $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{SM} = m\omega^2 (d_{TS} + r_{L_2}) \vec{e}_x$ ,
  - Force d'inertie de Coriolis :  $\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$  car le télescope est immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

À l'équilibre dans  $\mathcal{R}$ , la somme des actions agissant sur le télescope est nulle,

$$\vec{F}_S + \vec{F}_T + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC} = \vec{0}$$

Remarque : on peut en déduire une relation, directement projeté sur l'axe  $\vec{e}_x$  :

$$g \frac{mM_S}{(d_{TS} + r_{L_2})^2} + g \frac{mM_T}{r_{L_2}^2} = m\omega^2 (d_{TS} + r_{L_2})$$

Sachant que  $\omega = \sqrt{\frac{gM_S}{d_{TS}^3}}$ , on obtient

$$g \frac{mM_S}{(d_{TS} + r_{L_2})^2} + g \frac{mM_T}{r_{L_2}^2} = m \frac{gM_S}{d_{TS}^3} (d_{TS} + r_{L_2})$$

$$\frac{M_S}{(d_{TS} + r_{L_2})^2} + \frac{M_T}{r_{L_2}^2} = \frac{M_S}{d_{TS}^3} (d_{TS} + r_{L_2})$$

Q30. On peut minorer le rapport  $R$  par  $R_{\min} = \frac{R_T}{d_{TS}}$  car le télescope n'est plus sur Terre. Ensuite, on peut chercher  $R_{\max}$  afin que  $F(R_{\min}) \times F(R_{\max}) < 0$ , de manière à s'assurer que l'intervalle  $[R_{\min}; R_{\max}]$  contienne bien la racine recherchée de la fonction  $F$ .

Remarque : l'équation obtenue en fin de Q29 permet de déterminer cette fonction  $F(R, \alpha) = 0$ . En effet,

$$\frac{M_S}{(d_{TS} + r_{L_2})^2} + \frac{M_T}{r_{L_2}^2} = \frac{M_S}{d_{TS}^3} (d_{TS} + r_{L_2}) \Leftrightarrow \frac{1}{d_{TS}^2 (1+R)^2} + \frac{\alpha}{r_{L_2}^2} = \frac{1}{d_{TS}^2} (1+R)$$

On en déduit une forme possible de la fonction à annuler

$$F(R, \alpha) = \frac{1}{(R+1)^2} + \frac{\alpha}{R^2} - R - 1$$

Q31.  $r_{L_2} = R \cdot d_{TS} \stackrel{AN}{=} 0,009 \times 1,5 \times 10^8 \text{ km} = \boxed{1,4 \times 10^6 \text{ km}}$ .

Q32. Nous partons de l'application du principe fondamental de la dynamique au télescope dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , soit

$$m \frac{d^2 \overline{SM}}{dt^2} )_{\mathcal{R}} = \vec{F}_S + \vec{F}_T + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}$$

Q33. Calculons les composantes de la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) = -2m\vec{\omega} \wedge \frac{d\overline{SM}}{dt} )_{\mathcal{R}} = -2m\omega \vec{e}_z \wedge (\dot{\varepsilon}_x \vec{e}_x + \dot{\varepsilon}_y \vec{e}_y + \dot{\varepsilon}_z \vec{e}_z)$$

$$\vec{F}_{iC} = -2m\omega \dot{\varepsilon}_x \vec{e}_y + 2m\omega \dot{\varepsilon}_y \vec{e}_x$$

En divisant par  $m$ , on obtient les termes demandés ;  $-2\omega \dot{\varepsilon}_x \vec{e}_y + 2\omega \dot{\varepsilon}_y \vec{e}_x$ .

Q34. L'équation différentielle satisfaite par la fonction  $\varepsilon_z(t)$  est celle d'un oscillateur harmonique dont on sait que les solutions ne divergent pas. **Le mouvement est donc stable selon l'axe  $z$  et se superposera au mouvement dans le plan  $(xOy)$  dont nous devons étudier la stabilité.**

Q35. À l'aide des formes proposées, en résolvant dans  $\mathbb{C}$ , on obtient le système d'équations suivant;

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_x = p^2 \varepsilon_x = 2\omega p \varepsilon_y + 9\omega^2 \varepsilon_x \\ \ddot{\varepsilon}_y = p^2 \varepsilon_y = -2\omega p \varepsilon_x - 3\omega^2 \varepsilon_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 \underline{A}_x = 2\omega p \underline{A}_y + 9\omega^2 \underline{A}_x \\ p^2 \underline{A}_y = -2\omega p \underline{A}_x - 3\omega^2 \underline{A}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p^2 - 9\omega^2)\underline{A}_x - 2\omega p\underline{A}_y = 0 \\ 2\omega p\underline{A}_x + (p^2 + 3\omega^2)\underline{A}_y = 0 \end{cases}$$

Que l'on peut réécrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} p^2 - 9\omega^2 & -2\omega p \\ 2\omega p & p^2 + 3\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{A}_x \\ \underline{A}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q36. Afin de trouver un mouvement dans le plan  $(xOy)$ , le système précédent doit fournir des solutions non nulles, ce qui impose que le déterminant du système soit nul,

$$(p^2 - 9\omega^2)(p^2 + 3\omega^2) + 4\omega^2 p^2 = 0 \Leftrightarrow p^4 - 2\omega^2 p^2 - 27\omega^4 = 0$$

Les solutions seront stables (dans le cas général de conditions initiales quelconques) si et seulement si les quatre racines de cette équation possèdent chacune une partie réelle négative. Cette équation bicarrée est de discriminant réduit positif ( $\omega^4 + 27\omega^4 > 0$ ), on obtient les deux solutions

$$p^2 = \omega^2 \pm \sqrt{28}\omega^2$$

Et les quatre racines

$$p = \pm\omega\sqrt{1 + \sqrt{28}} \text{ et } p = \pm i\omega\sqrt{\sqrt{28} - 1}$$

La racine  $p_1 = +\omega\sqrt{1 + \sqrt{28}}$  entraîne l'existence d'une solution divergente dans l'espace des solutions des équations du mouvement.

Q37. Cette solution divergente est de la forme  $e^{p_1 t}$  et son temps caractéristique d'évolution est de l'ordre de

$$\tau = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{\omega\sqrt{1 + \sqrt{28}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}} \stackrel{AN}{=} \frac{365,25}{2\pi\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}} = 23,2 \text{ jours}$$

Il sera nécessaire de corriger la position du satellite tous les **23 jours** environ.

Q38. La position  $L_2$  est à la fois assez **proche** de la Terre (par rapport aux autres points de Lagrange) et opposée au soleil par rapport à la Terre, ce qui évite les **effets d'aveuglement** du télescope par la lumière solaire.