Concours Centrale Supélec - Physique Chimie 2

Proposition de correction*

I Microphone

Q1. Le métal ferromagnétique qui compose les cordes perturbe le champ magnétique créé par l'aimant. Il y a donc variation dans le temps du champ magnétique et donc variation dans le temps du flux de ce champ au travers du circuit fixe formé par la bobine, ce qui provoque l'apparition d'une force électromotrice (f.é.m.) à ses bornes : il s'agit du phénomène d'**induction de Neumann**.

On modélise cette variation du champ magnétique par la variation d'un champ magnétique produite par un aimant en mouvement, ici la corde de guitare.

Q2. La loi de Faraday permet d'exprimer la force électromotrice e apparaissant aux bornes d'un circuit traversé par un flux magnétique ϕ :

$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}.}$$

I.A Mouvement vertical

Q3. Le flux du champ magnétique ϕ au travers une spire est

$$\boxed{\phi = \iint_{\mathscr{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

avec $\mathscr{S}$ la surface de la spire et $\mathrm{d}\vec{S}$ l'élément de surface orientée infinitésimal.

Q4. La spire délimite le cercle de rayon R correspondant à la base d'une calotte sphérique dont le rayon de la sphère d'origine est r et dont l'angle entre la droite passant par le pôle de la calotte et une droite passant par le cercle de base est θ_{min} tel que $\sin\theta_{\text{min}} = R/r$. L'élément de surface infinitésimal associé est $\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$ en coordonnées sphériques. La spire étant orientée dans le sens direct, l'élément de surface infinitésimal orienté est $\mathrm{d}\vec{S} = -\mathrm{d}S\vec{e}_r$. Le flux du champ magnétique au travers de la spire de surface $\mathscr{S}$ est alors

$$\phi = \iint_{\mathscr{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_{\theta_{\text{min}}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 M \cos\theta \sin\theta}{2\pi r} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

avec $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Ainsi

$$\phi = -\frac{\mu_0 M}{\sqrt{R^2+z^2}} \int_{\theta_{\text{min}}}^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}(\sin\theta) = -\frac{\mu_0 M}{2\sqrt{R^2+z^2}} \left[\sin^2\theta\right]_{\theta_{\text{min}}}^{\pi}$$

et donc

$$\boxed{\phi = \frac{\mu_0 M}{2\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} R^2.}$$

*Contacts : Erwan Capitaine et Fabien Baudribos

Q5. D'après la loi de Faraday, comme la coordonnée z de l'aimant varie dans le temps, il vient que la f.é.m. générée dans une spire est

$$e_{\text{spire}} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 M}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\right) = \frac{3\mu_0 M}{2}\frac{z\dot{z}R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}$$

et donc dans toute la bobine la f.é.m. est

$$\boxed{e = \frac{3N\mu_0 M}{2}\frac{z\dot{z}R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}.}$$

Q6. On voit que

$$\begin{aligned}
z(t) &= \bar{z} + z_0 \sin(2\pi f t)\\
\dot{z}(t) &= 2\pi f z_0 \cos(2\pi f t)\\
z(t)\dot{z}(t) &= 2\pi f z_0 \bar{z}\cos(2\pi f t) + 2\pi f z_0^2 \sin(2\pi f t)\cos(2\pi f t)\\
z(t)\dot{z}(t) &= 2\pi f z_0 \bar{z}\cos(2\pi f t) + \pi f z_0^2 \sin(4\pi f t).
\end{aligned}$$

Comme $2\bar{z}/z_0 = 10$, $\bar{z}^2/z_0^2 = 25$, et $R^2/\bar{z}^2 = 4$, en ordre de grandeur il vient que

$$e \simeq \frac{3\pi N\mu_0 M f z_0 R^2\left(2\bar{z}+z_0\right)}{2\left(R^2+\bar{z}^2\right)^{5/2}} \simeq \frac{3\pi N\mu_0 M f z_0 \bar{z}}{R^3}.$$

A.N.

$$\boxed{e \simeq \frac{3\pi\times 5000\times 4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}\times 1\times 10^{-3}\,\mathrm{A\cdot m^2}\times 500\,\mathrm{s^{-1}}\times 1\times 10^{-3}\,\mathrm{m}\times 5\times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{1\times 10^{-6}\,\mathrm{m^3}} \simeq 100\,\mathrm{mV}.}$$

Q7. Les calculs des rapport précédents impliquant les valeurs des différents grandeurs fournies R, $\bar{z}$ et z_0 permettent de déterminer les termes prépondérants dans l'expression de la force électromotrice, soit

$$e \simeq \frac{3\pi N\mu_0 M f\bar{z}}{R^3} z_0 \cos(2\pi f t).$$

Cette approximation nous permet d'affirmer que **la réponse du micro peut être considérée comme linéaire** : les terme harmoniques sont négligés devant le terme fondamental qui varie linéairement avec l'amplitude z_0.

I.B Étude du mouvement horizontal

Q9. L'élément de surface infinitésimal $\mathrm{d}S$ en coordonnées cylindro-polaires dépend de son orientation. On suppose ici que cet élément est orienté selon $\overrightarrow{e}_z$, ainsi

$$\boxed{\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

avec ici r et θ de nouvelles notations pour les coordonnées cylindriques, correspondant à ρ et φ dans la sous-partie I.A

Q10. D'après la réponse précédente

$$\boxed{\phi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{e}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

avec r la coordonnée radiale d'un point de la spire comprise entre les bornes 0 et R, et θ sa coordonnée angulaire comprise entre les bornes 0 et 2π.

Q11. On propose la fonction suivante.

```python
import numpy as np

def phi(y):
    #Initialisation du flux
    phi_total = 0

    #Attribution d'une valeur en mètre au rayon de la spire si pas déjà fait
    Rayon = 1e-2

    #Initialisation du vecteur contenant les coordonnées radiales des points
    r = np.linspace(0, Rayon, 100)

    #Initialisation du vecteur contenant les coordonnées angulaires des points
    theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 100 )

    phi_theta = []

    #Intégration de la fonction B(r,\theta,y)*r entre 0 et R pour un angle theta fixé
    for k in range(len(theta)):
        #Initialisation de l'intégrale de B(r,\theta,y)*r pour un angle theta fixé
        phi_r = 0

        #Méthode des trapèzes pour obtenir l'intégrale de B(r,\theta,y)*r
        for l in range(len(r)-1):
            phi_r = phi_r + 0.5*( B(r[l+1], theta[k], y)*r[l+1] \
                        + B(r[l], theta[k], y)*r[l] )*( r[l+1] - r[l] )

        #Attribution de l'intégrale B(r,\theta,y)*r pour un angle theta fixé
        phi_theta.append( phi_r )

    #Intégration de la fonction f(theta) entre 0 et 2pi
    #avec f(theta) l'intégrale de B(r,\theta,y)*r entre 0 et R pour un angle theta fixé
    for k in range(len(theta)-1):
        phi_total = phi_total + 0.5*( phi_theta[k+1] + phi_theta[k])*( theta[k+1]\
                - theta[k] )*( theta[k+1] - theta[k] )

    return phi_total
```

Q12. On propose le code suivant.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

#Attribution des valeurs des positions y en mètre de l'aimant
y = np.linspace(-1e-2, 1e-2, 100)

#Initialisation des valeurs de flux pour chaque position en y
flux_y = []

for k in range(len(y)):
    flux_y.append( phi( y[k] ) )

plt.figure(1)
plt.plot(y, flux_y)
plt.grid()
plt.show()
```

On obtient le résultat suivant pour une position y comprise entre $-5\,\mathrm{cm}$ et $5\,\mathrm{cm}$ et une altitude $z = 10\,\mathrm{mm}$ (différente de la position $\bar{z} = 5\,\mathrm{mm}$ donnée).

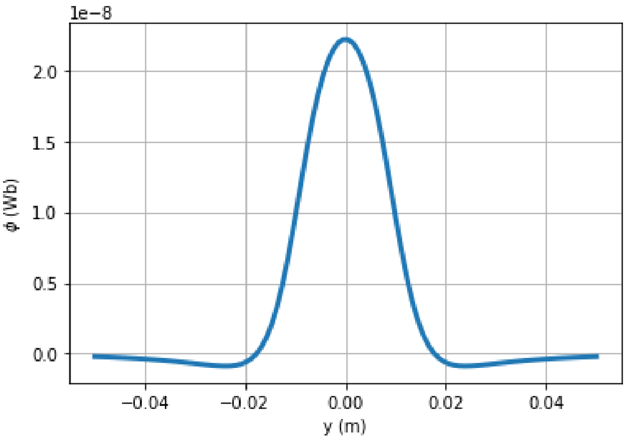


Figure 1: Calcul du flux magnétique au travers d'une spire d'un aimant oscillant horizontalement pour $z = 10\,\mathrm{mm}$.

Q13. L'allure de la variation de flux par rapport à y nous permet d'estimer l'allure de la variation de flux par rapport au temps : on aura une répétition du pic précédent (légèrement déformé par la conversion des positions en temps) tous les $t = 1/f$ soit un signal périodique de fondamental $f = 200\,\mathrm{Hz}$ et d'harmoniques $f_n = n \times 200\,\mathrm{Hz}$ avec n un entier supérieur à un.

Ainsi, on peut considérer que le spectre de ce signal est celui d'un signal périodique avec peu de discontinuités : le fondamental ainsi que les harmoniques de rang faibles ont donc des amplitudes plus importantes que celles des harmoniques de rang élevé.

I.C Positionnement du micro

Q14. L'amplitude des signaux de tension du fondamental et des deux premiers harmoniques sont données sur le spectre. Chacune de ces trois composantes est liée à une onde mécanique stationnaire. On étudie ces trois ondes stationnaires.

La composante fondamentale est liée à l'onde stationnaire de longueur d'onde $\lambda_1 = 2L$. L'amplitude du profil temporel de l'onde $z(t)$ correspond à l'amplitude du profil spatial $z(x)$ à une certaine position x de telle manière que

$$z_1(x) = z_1 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_1}\right) = z_1 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right).$$

Pour l'harmonique de rang 2, l'onde stationnaire est de longueur d'onde $\lambda_2 = L$. La valeur du profil spatial de cette onde est

$$z_2(x) = z_2 \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right).$$

Pour l'harmonique de rang 3, l'onde stationnaire est de longueur d'onde $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$. La valeur du profil spatial de cette onde est

$$z_3(x) = z_3 \sin\left(3\pi \frac{x}{L}\right).$$

On a vu plus tôt que la f.é.m. induite par le mouvement d'une corde évoluée de manière linéaire par rapport à l'amplitude de son déplacement $z(t)$. On vient de montrer que cette amplitude est différente pour $x_a = 16\,\mathrm{cm}$ et $x_b = 4\,\mathrm{cm}$. En calculant le rapport de ces amplitudes, $z(x_b)/z(x_a)$, on peut obtenir le rapport respecté par l'amplitude des composantes spectrales de la f.é.m. $A(x_b)/A(x_a)$. Ainsi

$$A_1(x_b) = A_1(x_a)\left(\frac{\sin\left(\pi\frac{x_b}{L}\right)}{\sin\left(\pi\frac{x_a}{L}\right)}\right)$$
$$A_2(x_b) = A_2(x_a)\left(\frac{\sin\left(2\pi\frac{x_b}{L}\right)}{\sin\left(2\pi\frac{x_a}{L}\right)}\right)$$
$$A_3(x_b) = A_3(x_a)\left(\frac{\sin\left(3\pi\frac{x_b}{L}\right)}{\sin\left(3\pi\frac{x_a}{L}\right)}\right).$$

A.N.

$$A_1(x_b) = 8\,\mathrm{mV}\times\left(\frac{\sin\left(\pi\frac{4\,\mathrm{cm}}{67\,\mathrm{cm}}\right)}{\sin\left(\pi\frac{16\,\mathrm{cm}}{67\,\mathrm{cm}}\right)}\right) = 2\,\mathrm{mV}$$
$$A_2(x_b) = 2{,}5\,\mathrm{mV}\times\left(\frac{\sin\left(2\pi\frac{4\,\mathrm{cm}}{67\,\mathrm{cm}}\right)}{\sin\left(2\pi\frac{16\,\mathrm{cm}}{67\,\mathrm{cm}}\right)}\right) = 1\,\mathrm{mV}$$
$$A_3(x_b) = 1\,\mathrm{mV}\left(\frac{\sin\left(3\pi\frac{4\,\mathrm{cm}}{67\,\mathrm{cm}}\right)}{\sin\left(3\pi\frac{16\,\mathrm{cm}}{67\,\mathrm{cm}}\right)}\right) = 0{,}7\,\mathrm{mV}.$$

On obtient le spectre ci-dessous. On constate que la position du micro réduit l'ensemble des amplitudes, **ce qui réduit le son**, mais aussi que cela influence les valeurs relatives des amplitudes des différentes composantes, donc **la position du micro influence le timbre de la guitare**.

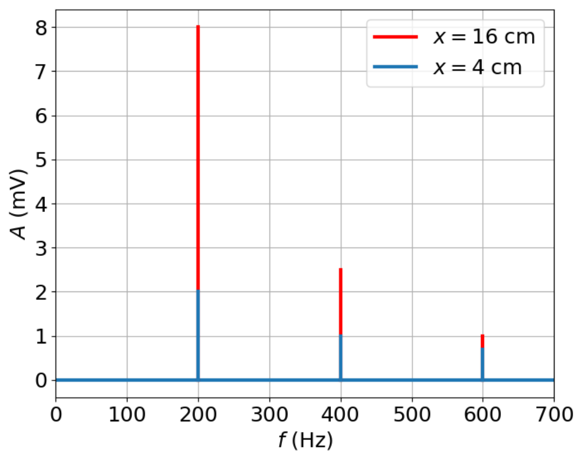


Figure 2: Spectres de la tension $e(t)$ fournie par un micro pour deux positions différentes.

II Aspect électrique

Q15. À basses fréquences, la bobine et le condensateur se comportent respectivement comme un fil et une interrupteur ouvert. Il vient que

$$\lim_{\omega\to 0} s(t) = e(t).$$

À hautes fréquences, la bobine et le condensateur se comporte respectivement comme un interrupteur ouvert et comme un fil. Il vient question

$$\lim_{\omega\to +\infty} s(t) = 0.$$

On peut conclure que **le filtre est du type passe-bas**.

Q16. La fonction de transfert du micro est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{\underline{e}} \times \underline{e}\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}.}$$

Q17. On identifie les différentes grandeurs en comparant les expressions de la fonction de transfert trouvée plus tôt et donnée dans l'énoncé

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \qquad \text{et} \qquad \underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

ainsi

$$\boxed{H_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

et

$$RC = \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{\sqrt{LC}}{Q}$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$$

Q18. Un phénomène de résonance apparaît lorsque l'amplitude du signal atteint un maximum. En régime sinusoïdal forcé, soit pour un signal d'entrée $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, le signal de sortie est de la forme $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Exprimons S_0.

En complexe il vient que

$$\underline{s} = \underline{H} \times \underline{e} = \frac{E_0 \mathrm{e}^{j\omega t}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

L'amplitude S_0 étant la norme de $\underline{s}$ il vient que

$$S_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + Q^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}.$$

Étudions la fonction argument de la racine

$$f(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}.$$

La dérivée de cette fonction est

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{4\omega}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2\frac{\omega}{Q^2\omega_0^2}.$$

Elle s'annule lorsque

$$-2\left(1 - \frac{\omega_{\text{ext}}^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{1}{Q^2} = 0$$

$$\omega_{\text{ext}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Pour que cet extremum soit atteint il faut que $\frac{1}{2Q^2} < 1$, donc que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Afin de vérifier la nature de cet extremum étudions la dérivée à l'ordre deux de cette fonction

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\omega^2} = -\frac{4}{\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{8\omega^2}{\omega_0^4} + 2\frac{1}{Q^2\omega_0^2}.$$

La nature de la courbure de $f(\omega)$ est donnée par le signe de cette dérivée pour $\omega = \omega_{\text{ext}}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\omega^2}\right)_{\omega_{\text{ext}}} = -\frac{4}{\omega_0^2}\left(1-1+\frac{1}{2Q^2}\right) + \frac{8}{\omega_0^2}\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right) + \frac{2}{Q^2\omega_0^2} = \frac{8}{\omega_0^2}\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right) > 0$$

car on a montré que $1-\frac{1}{2Q^2} > 1$ donc $f(\omega)$ est convexe et présente un minimum en ω_{ext}.

Ainsi, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $S_0(\omega)$ est concave et présente un maximum en $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$.

Q19. Le gain en décibel du filtre est

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log\left(\frac{S_0(\omega)}{E_0}\right) = 20\log(1) - 10\log\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right).$$

Pour tracer le diagramme, obtenons d'abord son tracé asymptotique ainsi que la valeur du gain en décibel en ω_0.

Pour $\omega \ll \omega_0$

$$G_{\text{dB}}(\omega_0) \simeq 0$$

asymptote horizontale.

Pour $\omega = \omega_0$

$$G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log(Q).$$

On retrouve bien le fait que plus le facteur de qualité Q est important, plus l'amplitude de résonance $S(\omega_r)$ augmente, or plus Q est important plus la pulsation de résonance et la pulsation propre sont proche.

Pour $\omega \gg \omega_0$

$$G_{\text{dB}}(\omega_0) \simeq -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

fonction affine de pente -40 dB.

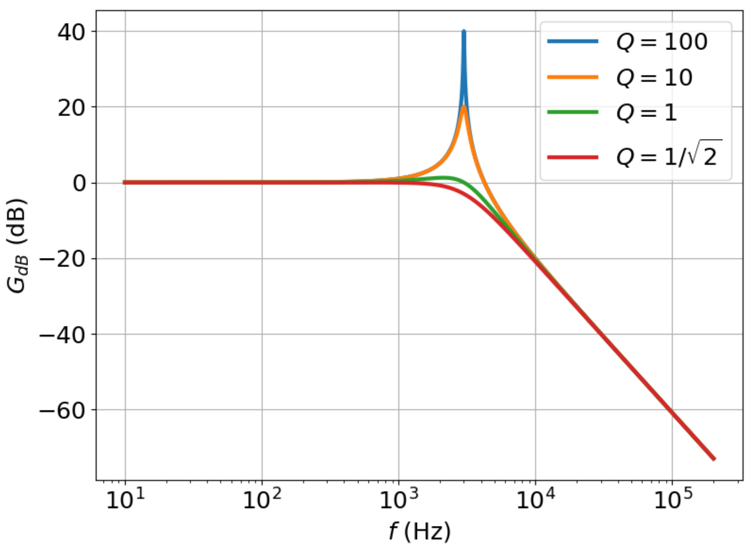


Figure 3: Diagramme de Bode en amplitude pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Q20. On peut tracer expérimentalement un digramme de Bode en mesurant à l'aide d'un oscilloscope la variation de la valeur de l'amplitude du signal de sortie d'un filtre en fonction de la variation de la fréquence imposée par le signal d'entrée.

Q21. La seule tension que l'on peut mesurer expérimentalement est la tension $s(t)$ en sortie du microphone, la force électromotrice $e(t)$ n'est pas accessible. Il est donc impossible de tracer le diagramme de Bode du micro de guitare.

Q22. De la même manière que précédemment on peut obtenir la fonction de transfert de ce nouveau circuit

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{1}{1+\frac{R}{r}}}{1-\omega^2\frac{LC}{1+\frac{R}{r}} + j\omega\frac{RC+\frac{L}{r}}{1+\frac{R}{r}}}$$

et la comparer à la forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 2

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

On identifie ainsi le gain statique H_0

$$H_0 = \frac{1}{1+\frac{R}{r}}.$$

Ainsi en augmentant la valeur de r, soit la valeur du gain statique, le guitariste augmente le volume du son émis par la guitare. On notera que cette résistance influence aussi la valeur de la fréquence de coupure du filtre passe-bas.

Q23. L'impédance du micro est, d'après la loi d'association des impédances en parallèle

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R+j\omega L}} = \frac{R+j\omega L}{1-\omega^2 LC + j\omega RC}.$$

Q24. D'après le pont diviseur de tension complexe, il vient que

$$\underline{U}_Z = \underline{E}\frac{\underline{Z}}{r+\underline{Z}}$$

et d'après la loi des mailles

$$\underline{U}_Z = (\underline{U}_r + \underline{U}_Z)\frac{\underline{Z}}{r+\underline{Z}}$$

$$\underline{Z}\underline{U}_Z + r\underline{U}_Z = \underline{Z}\underline{U}_Z + \underline{Z}\underline{U}_r$$

soit

$$\boxed{\underline{Z} = r\frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r}.}$$

Q25. À basses fréquences $1 \gg \omega^2 LC$, $1 \gg \omega RC$ et $R \gg \omega L$, ainsi

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{R+j\omega L}{1-\omega^2 LC + j\omega RC} \simeq R.}$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$R \simeq r\frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r}.$$

Le digramme de Bode en amplitude des deux micros présente le rapport $\|\underline{U}_Z/\underline{U}_r\|$. À basse fréquence on lit

$$R_{\text{Fender}} \simeq r \times 1{,}5 \qquad \text{et} \qquad R_{\text{Dynasonic}} \simeq r \times 0{,}7.$$

A.N.

$$\boxed{R_{\text{Fender}} \simeq 10 \times 10^3\,\Omega \times 1{,}5 = 15\,\text{k}\Omega \qquad \text{et} \qquad R_{\text{Dynasonic}} \simeq 10 \times 10^3\,\Omega \times 0{,}7 = 7\,\text{k}\Omega.}$$

Q26. Si R et L dominent $\underline{Z}$ pour ces fréquences, le schéma électrique du micro peut être modélisé par un dipôle RL série uniquement, il vient donc que

$$\underline{Z} \simeq R + j\omega L.$$

Ainsi si

$$|\underline{Z}| = r\left|\frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r}\right|$$

alors

$$R^2 + \omega^2 L^2 \simeq \left(r\left|\frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r}\right|\right)^2$$

et donc

$$\boxed{L \simeq \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(r\left|\frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r}\right|\right)^2 - R^2}.}$$

On lit alors les valeurs du rapport $\|\underline{U}_Z/\underline{U}_r\|$ pour $f = 1\,\text{kHz}$.

A.N.

$$\boxed{L_{\text{Fender}} \simeq \frac{1}{2\pi \times 1 \times 10^3\,\text{Hz}}\sqrt{(10 \times 10^3\,\Omega \times 6)^2 - (15 \times 10^3\,\Omega)^2} = 9\,\text{H}.}$$

$$\boxed{L_{\text{Dynasonic}} \simeq \frac{1}{2\pi \times 1 \times 10^3\,\text{Hz}}\sqrt{(10 \times 10^3\,\Omega \times 1{,}5)^2 - (7 \times 10^3\,\Omega)^2} = 2\,\text{H}.}$$

Q27. À partir de l'expression fournie

$$\underline{Z} = R\frac{1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

si $\omega \simeq \omega_0$ et $Q \gg 1$, il vient que

$$\underline{Z} \simeq R\frac{jQ}{\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) + j\frac{1}{Q}}$$

$$\boxed{\underline{Z} \simeq R\frac{jQ^2}{2Q\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) + j}.}$$

Toujours à partir de l'expression de $\underline{Z}$ donnée plus tôt et de celle trouvée

$$\underline{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

on peut identifier la pulsation propre ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

On peut voir que la valeur maximale de $|\underline{Z}|$ est atteinte pour $\omega \simeq \omega_0$ si $Q \gg 1$, cela correspond aussi à la valeur maximale de $\left|\frac{\underline{U_Z}}{\underline{U_r}}\right|$. Ainsi on lisant la valeur de fréquence f_0 correspondant au maximum de $\left|\frac{\underline{U_Z}}{\underline{U_r}}\right|$ sur le digramme de Bode on peut obtenir la valeur de C pour les deux micros :

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L f_0}.$$

A.N.

$$\boxed{C_{\text{Fender}} = \frac{1}{4\pi^2 \times 9\,\mathrm{H} \times 3 \times 10^3\,\mathrm{Hz}} = 0{,}3\,\mathrm{nF}.}$$

$$\boxed{C_{\text{Dynasonic}} = \frac{1}{4\pi^2 \times 2\,\mathrm{H} \times 2{,}5 \times 10^4\,\mathrm{Hz}} = 0{,}02\,\mathrm{nF}.}$$

Q28. À partir de l'expression de $\underline{Z}$ obtenu pour $Q \gg 1$ et $\omega_0 \simeq \omega$, on peut exprimer la valeur de la largeur à la résonance pour les deux micros afin de comparer les plages de fréquences amplifiées.

On a montré question 27 que

$$\underline{Z} \simeq R \frac{jQ^2}{2Q\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) + j}$$

ainsi

$$\left|\frac{\underline{U_Z}}{\underline{U_r}}\right| = \frac{1}{r}\,|\underline{Z}| \simeq \frac{R}{r}\frac{Q^2}{\sqrt{4Q^2\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1}}.$$

À la résonance

$$\left|\frac{\underline{U_Z}}{\underline{U_r}}\right|_{\text{max}} \simeq \frac{R}{r} Q^2.$$

On définit la largeur à résonance la plage de fréquences délimitée par les fréquences correspondant aux amplitudes

$$\left|\frac{\underline{U_Z}}{\underline{U_r}}\right|_{\text{FWHM}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\underline{U_Z}}{\underline{U_r}}\right|_{\text{max}} = \frac{R}{r}\frac{Q^2}{\sqrt{2}}.$$

Dans ce cas

$$2 = 4Q^2\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 2\frac{\omega}{\omega_0} + \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) = 0$$

on reconnaît une équation du second degré dont les racines sont les pulsations délimitant la largeur à résonance

$$\omega_{\pm} = \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right).$$

Ainsi la largeur à résonance est, en fréquences,

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega_0}{Q}$$

soit

$$\Delta f = \frac{R}{2\pi L}.$$

A.N.

$$\boxed{\Delta f_{\text{Fender}} = \frac{15\times 10^3\,\Omega}{2\pi\times 9\,\text{H}} = 260\,\text{Hz}.}$$

$$\boxed{\Delta f_{\text{Dynasonic}} = \frac{7\times 10^3\,\Omega}{2\pi\times 2\,\text{H}} = 560\,\text{Hz}.}$$

Ces deux largeurs de résonances sont situées autours des deux fréquences de résonances f_0 telle que

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

A.N.

$$\boxed{f_{0\text{Fender}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{9\,\text{H}\times 0{,}3\times 10^{-9}\,\text{F}}} = 3{,}1\,\text{kHz}.}$$

A.N.

$$\boxed{f_{0\text{Dynasonic}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\,\text{H}\times 0{,}02\times 10^{-9}\,\text{F}}} = 25\,\text{kHz}.}$$

Ainsi, on constate que le micro Dynasonic présente une résonance étroite dans le domaine des ultrasons (fréquences supérieures à $20\,\text{kHz}$), alors que le micro Fender présente une résonance étroide dans la partie "aiguë" du domaine audible (fréquences supérieures à $2\,\text{kHz}$). Cette résonance permet donc au micro Fender d'amplifier préférentiellement une certaines largeur de fréquences dans la partie supérieure du domaine audible, et donc de "sonner plus aigu que le micro Dynasonic".

III Transmission dans un câble coaxial

Q29. Les équations de Maxwell sont :

- Maxwell-Thomson (ou Maxwell-flux) : $\text{div}\,\vec{B} = 0$
- Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
- Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Or dans le vide, il n'y a ni charge, ni courant donc les équations de Maxwell deviennent :

- Maxwell-Thomson (ou Maxwell-flux) : $\text{div}\,\vec{B} = 0$
- Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E} = 0$
- Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
- Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Q30. Pour obtenir l'équation de propagation du champ électrique, on utilise la relation vectorielle suivante :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\,\vec{E} \\ &= -\vec{\Delta}\,\vec{E} \quad \text{car } \text{div}\,\vec{E} = 0 \text{ (Maxwell-Gauss dans le vide)}\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}) &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right) \text{ (d'après Maxwell-Faraday)}\\ &= -\frac{\partial\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}}{\partial t} \text{ (d'après le théorème de Schwarz)}\\ &= -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \text{ (d'après Maxwell-Ampère dans le vide)}\end{aligned}$$

Donc, on en déduit l'équation de propagation du champ électrique appelée **équation de d'Alembert** :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

Q31. On doit vérifier si le champ électrique et le champ magnétique vérifient l'équation de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E} &= \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial z^2}\\ &= \frac{\partial^2 \overrightarrow{E_0}\mathrm{e}^{j(\omega t - kz)}}{\partial z^2}\\ &= (-jk)^2\overrightarrow{E_0}\mathrm{e}^{j(\omega t - kz)}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E} &= \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}\\ &= \frac{\partial^2 \overrightarrow{E_0}\mathrm{e}^{j(\omega t - kz)}}{\partial t^2}\\ &= (j\omega)^2\overrightarrow{E_0}\mathrm{e}^{j(\omega t - kz)}\end{aligned}$$

Donc, d'après l'équation de d'Alembert selon :

$$\begin{aligned}&(-jk)^2\overrightarrow{E_0}\mathrm{e}^{j(\omega t - kz)} - \frac{1}{c^2}(j\omega)^2\overrightarrow{E_0}\mathrm{e}^{j(\omega t - kz)} = 0\\ \iff\quad & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0\\ \iff\quad & k = \frac{\omega}{c} \textbf{ (relation de dispersion dans le vide)}\end{aligned}$$

Les calculs sont identiques pour le champ magnétique.

On en déduit donc que $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ respectent l'équation de d'Alembert si la norme du vecteur d'onde s'exprime de la manière suivante :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

Ces ondes sont donc des ondes **planes** (plans d'onde sont des plans d'équations $z = \mathrm{cst}$), **monochromatiques** et de **polarisation rectiligne** car $\overrightarrow{E_0} = \overrightarrow{\mathrm{cst}}$ et $\overrightarrow{B_0} = \overrightarrow{\mathrm{cst}}$.

Q32. Les conducteurs sont supposés parfaits donc les champs électrique et magnétique sont nuls dans les conducteurs. On en déduit d'après l'équation de Maxwell-Ampère que dans les conducteurs parfaits : $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$. Les courants sont donc obligatoirement à la surface extérieure des conducteurs parfaits. $i(z,t)$ est donc surfacique.

Q33. On a d'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Or, d'après le théorème de Stokes, on a :

$$\iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl}$$

avec $\mathscr{S}$ une surface quelconque et $\mathscr{C}$ le contour fermé associé à $\mathscr{S}$.

On choisit comme surface $\mathscr{S}$ un disque perpendiculaire à l'axe (Oz), de centre situé sur l'axe (Oz) et de rayon r. Le contour $\mathscr{C}$ est donc un cercle de centre compris sur l'axe (Oz) et de rayon r.

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} \\
\iff\quad &\iint_{\mathscr{S}} \left(\mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} \\
\iff\quad &\mu_0 \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS}\right) = \oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl}
\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{E}$ est porté par le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ alors que $\overrightarrow{dS}$ est porté par le vecteur $\overrightarrow{e_z}$. Donc $\iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$.

On obtient alors :

$$\boxed{\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0\, i_{\text{enlace}} \text{ avec } i_{\text{enlace}} = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{dS}}$$

Q34. On rappelle que $\mathscr{C}$ est un disque perpendiculaire à l'axe (Oz), de centre O' situé sur l'axe (Oz), de rayon r et orienté à l'aide de la règle de la main droite afin d'obtenir $\overrightarrow{dl} = rd\theta\overrightarrow{e_\theta}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} &= \oint_{\mathscr{C}} B_0(r)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_\theta}.dl\overrightarrow{e_\theta} \\
&= \int_0^{2\pi} B_0(r)\cos(\omega t - kz) r d\theta \\
&= 2\pi r B_0(r)\cos(\omega t - kz)
\end{aligned}$$

<u>Pour $r < a$:</u> $i_{\text{enlace}} = 0$, donc :

$$\boxed{B_0(r) = 0}$$

<u>Pour $a < r < b$:</u> $i_{\text{enlace}} = i_0\cos(\omega t - kz)$, donc :

$$2\pi B_0(r)\cos(\omega t - kz) = \mu_0 i_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\boxed{B_0(r) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}}$$

<u>Pour $b < r$:</u> $i_{\text{enlace}} = i_0\cos(\omega t - kz) - i_0\cos(\omega t - kz) = 0$, donc :

$$\boxed{B_0(r) = 0}$$

Q35. D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

Or le rotationnel en coordonnées sphériques est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Donc, pour $a < r < b$:

$$\frac{\partial E_r}{\partial z}\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}\omega \sin(\omega t - kz)\overrightarrow{e_\theta}$$

Donc selon $\overrightarrow{e_\theta}$, et en intégrant par rapport à z, on obtient :

$$\begin{aligned} & E_r = \frac{\mu_0 i_0 \omega}{2\pi r k}\cos(\omega t - kz) \\ \iff \quad & E_r = \frac{i_0\omega}{2\pi k r \varepsilon_0 c^2}\cos(\omega t - kz) \text{ car } \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \\ \iff \quad & E_r = \frac{i_0\omega}{2\pi k r \varepsilon_0 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}\cos(\omega t - kz) \text{ car } k = \frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_r} \text{ avec } E_0(r) = \frac{i_0 k}{2\pi\varepsilon_0 r\omega}}$$

Q36. Le mode TEM décrit bien une onde plane car les surfaces d'ondes sont décrites par des plans d'équations $z = \mathrm{cst}$.

Pour retrouver la relation de structure, on utilise l'équation de Maxwell-Faraday en complexe (pour une onde plane $\overrightarrow{k}$ est un réel) :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\overrightarrow{E}} = -\frac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t} \\ \iff \quad & -j\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}} = -j\omega\underline{\overrightarrow{B}} \\ \iff \quad & \underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega} \end{aligned}$$

En repassant en réel, on obtient la relation de structure pour les ondes planes :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega}}$$

Q37. Par définition :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k)}$$

Donc, ici, on obtient :

$$\boxed{v_\varphi = c}$$

Comme v_φ ne dépend pas de la pulsation de l'onde, **il n'y a pas de phénomène de dispersion**.

Q38. Pour $a < r < b$, le vecteur de Poynting instantané s'exprime comme :

$$\overrightarrow{\Pi} = -\frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$
$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\frac{i_0 k}{2\pi\varepsilon_0 r\omega}\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_r} \wedge \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_\theta}}{\mu_0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi}(M,t) = \frac{k}{\varepsilon_0\omega}\left(\frac{i_0}{2\pi r}\right)^2 \cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z}}$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique instantané s'exprime comme :

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 ||\overrightarrow{E}||^2}{2} + \frac{||\overrightarrow{B}||^2}{2\mu_0}$$
$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 i_0^2 k^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2 r^2\omega^2}\cos^2(\omega t - kz) + \frac{\mu_0^2 i_0^2}{8\mu_0\pi^2 r^2}\cos^2(\omega t - kz)$$
$$u_{em} = \frac{i_0^2}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{k^2}{\varepsilon_0\omega^2} + \mu_0\right)\cos^2(\omega t - kz)$$
$$u_{em} = \frac{i_0^2}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} + \mu_0\right)\cos^2(\omega t - kz) \text{ car } k = \frac{\omega}{c}$$

$$\boxed{u_{em}(M,t) = \frac{i_0^2\mu_0}{4\pi^2 r^2}\cos^2(\omega t - kz)} \text{ car } \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

On peut maintenant en déduire la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique :

$$\overrightarrow{v_{\text{em}}} = \frac{\overrightarrow{\Pi}}{u_{em}}$$
$$\overrightarrow{v_{\text{em}}} = \frac{\frac{k}{\varepsilon_0\omega}\left(\frac{i_0}{2\pi r}\right)^2\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z}}{\frac{i_0^2\mu_0}{4\pi^2 r^2}\cos^2(\omega t - kz)}$$
$$\overrightarrow{v_{\text{em}}} = \frac{k}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\overrightarrow{e_z} = \frac{c^2}{c}\overrightarrow{e_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_{\text{em}}} = c\,\overrightarrow{e_z}}$$

Q39. La puissance moyenne se déplaçant dans le câble est :

$$\mathscr{P}_{\text{em}} = \iint_{section}\left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle_\tau \cdot \overrightarrow{dS}$$
$$\mathscr{P}_{\text{em}} = \int_{r=a}^{r=b}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left\langle\frac{k}{\varepsilon_0\omega}\left(\frac{i_0}{2\pi r}\right)^2\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z}\right\rangle_\tau \cdot rdrd\theta\,\overrightarrow{e_z}$$
$$\mathscr{P}_{\text{em}} = \frac{ki_0^2}{2\pi\varepsilon_0\omega}\left\langle\cos^2(\omega t - kz)\right\rangle_\tau \int_{r=a}^{r=b}\frac{1}{r}dr$$
$$\mathscr{P}_{\text{em}} = \frac{ki_0^2}{2\pi\varepsilon_0\omega}\frac{1}{2}[\ln(r)]_{r=a}^{r=b}$$

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{em}} = \frac{ki_0^2}{4\pi\varepsilon_0\omega}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Q40. La longueur caractéristique de pénétration d'une onde électromagnétique dans un conducteur se nomme l'épaisseur de peau est s'exprime comme :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}}$$

On peut réaliser une application numérique de cette épaisseur de peau pour une fréquence caractéristique du signal reçu par le micro : $f_0 = 200\,\mathrm{Hz}$ (figure 5).

A.N.

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}} \times 2\pi \times 200\,\mathrm{Hz} \times 5{,}9 \times 10^{7}\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}}} \approx 4{,}6\,\mathrm{mm}}$$

Or le diamètre d'un câble coaxial est du même ordre de grandeur ($6\,\mathrm{mm}$) donc **le modèle du conducteur parfait n'est sûrement pas pertinent avec la gamme de fréquence que nous utilisons**.

IV Numérisation et traitement du signal

Q41. A_0, A_1 et A_2 sont des ALI idéales donc les intensités de ces courants en entrée des ALI sont nulles.

On peut alors utiliser des ponts diviseur de tension pour exprimer V_0, V_1 et V_2 car les quatre résistances R sont en série.

On a alors :

$$\boxed{V_0 = \frac{R}{4R}V_{cc} = \frac{V_{cc}}{4}}$$

$$\boxed{V_1 = \frac{2R}{4R}V_{cc} = \frac{V_{cc}}{2}}$$

$$\boxed{V_2 = \frac{3R}{4R}V_{cc} = \frac{3V_{cc}}{4}}$$

Q42. Un ALI idéal peut fonctionner de deux manières différentes : en régime linéaire si $V_+ = V_-$ ou en régime saturé si $V_+ \neq V_-$. On considère ici que l'ALI fonctionne en régime saturé. Dans ce cas, si $V_+ > V_-$, alors la tension de sortie de l'ALI V_s est en saturation positive : $V_s = +V_{sat}$ que l'on considérera comme un état Haut, noté 1. Et si $V_+ < V_-$, alors la tension de sortie de l'ALI V_s est en saturation négative : $V_s = -V_{sat}$ que l'on considérera comme un état Bas, noté 0.

Ceci nous permet donc de remplir la table de vérité ci-dessous (il doit y avoir une erreur dans l'énoncé car il n'existe pas de b_0 sur le schéma mais par contre, il existe un b_2).

	S_0	S_1	S_2	$b_1 = S_1$	$\overline{b_1}$	$\overline{b_1} \times S_0$	$b_2 = (\overline{b_1} \times S_0) + S_2$
$0 < V_e < \frac{V_{cc}}{4}$	0	0	0	0	1	0	0
$\frac{V_{cc}}{4} < V_e < \frac{V_{cc}}{2}$	1	0	0	0	1	1	1
$\frac{V_{cc}}{2} < V_e < \frac{3V_{cc}}{2}$	1	1	0	1	0	0	0
$\frac{3V_{cc}}{4} < V_e < V_{cc}$	1	1	1	1	0	0	1

Q43. Un convertisseur flash sur 2 bits permet d'avoir 4 nombre binaires différents. Le convertisseur flash a alors besoin de 3 amplificateurs linéaires intégrés pour couper l'intervalle de tension du signal analogique en 4.

Pour un convertisseur flash sur 24 bits, il faut donc $2^{24} - 1 = 16\ 777\ 215$ **amplificateurs linéaires intégrés.**

Q44. L'ALI est idéal donc $i_+ = 0$. On peut donc utiliser un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_c} = \frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_c}} \underline{V_e}$$
$$\underline{u_c} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_c}}} \underline{V_e}$$
$$\underline{u_c} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{V_e}$$

On passe dans le domaine temporelle (on considère $V_e(t) = cst$ car ses variations temporelles sont très lentes devant RC) :

$$u_c(t) + RC \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t) = V_e$$
$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{u_c(t)}{\tau} = \frac{V_e}{\tau} \text{ avec } \tau = RC$$

La solution de cette équation différentielle du première ordre est :

$$u_c(t) = A \; \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + V_e \text{ avec } A \text{ une constante.}$$

Or à $t = 0$, le condensateur est déchargé, donc $u_c(t = 0^-) = u_c(t = 0^+) = 0$, donc $A = -V_e$ et :

$$u_c(t) = V_e \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

On souhaite connaître le temps t_1 au bout duquel $u_c(t_1) = 0{,}99 \; V_e$:

$$1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0{,}99$$
$$\mathrm{e}^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0{,}01$$
$$t_1 = -\tau \; \ln(0{,}01)$$

$$\boxed{t_1 = 4{,}6 \; \tau = 4{,}6 \; RC}$$

Pour que u_c diffère de V_e de moins de 1% à chaque front descendant, il faut que la demi-période d'échantillonnage $1/2f_e$ soit supérieure à $4{,}6 \; RC$ donc approximativement :

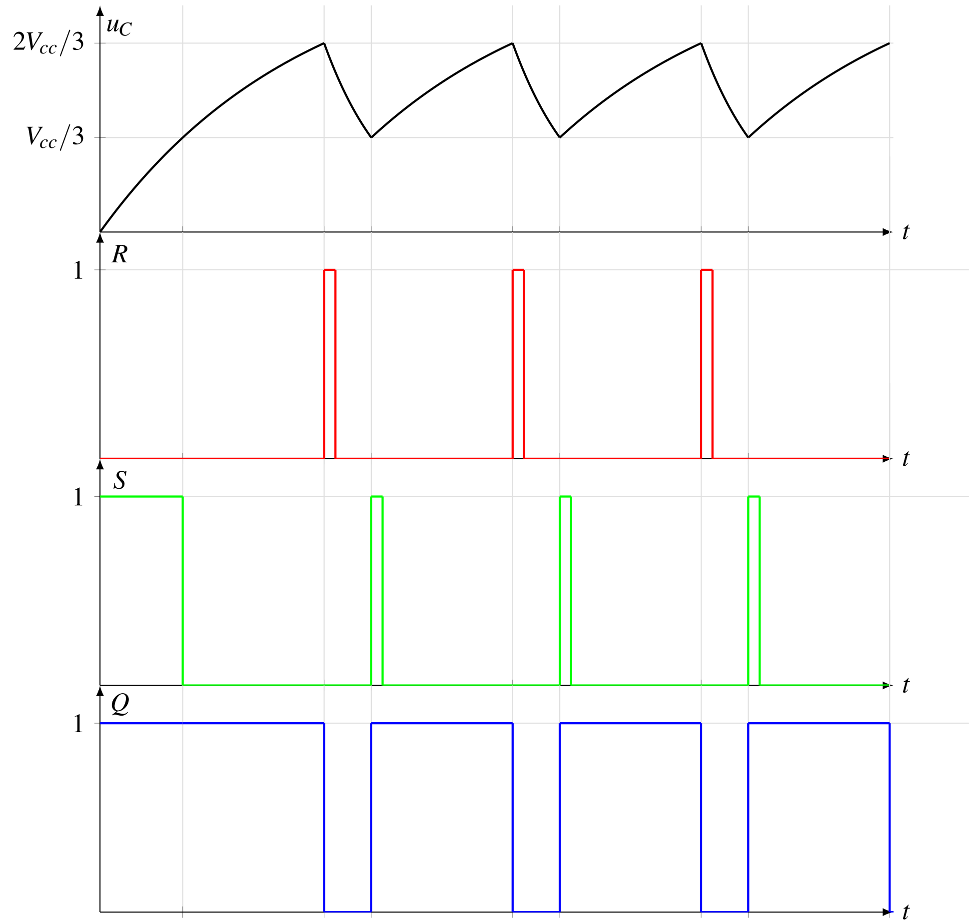
$$\boxed{RC < \frac{1}{10 \, f_e}}$$

Q45. La rétroaction de l'ALI idéal est négative donc elle fonctionne en régime linéaire. On a donc $V_s = V_- = V_+ = u_c$. De plus, l'ALI est idéal donc $i_+ = i_c = 0$. On obtient alors que $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = 0$, donc :

$$\boxed{V_s = u_c = cst}$$

L'intérêt de l'échantillonneur bloqueur est de "prélever" un échantillon du signal analogique et de "bloquer" sa valeur pendant un certain temps.

Q46. On peut réaliser le tracé ci-dessous.



Chronogramme de u_C, R, S et Q.

Q47. À partir du chronogramme précédent, on peut voir que le temps à l'état haut du signal Q, après mise sous tension, est proportionnel à la durée caractéristique de charge du condensateur $(R_A + R_B)C$, et le temps à l'état bas de ce même signal est proportionnel à la durée caractéristique de décharge du condensateur R_BC. Ainsi le rapport cyclique α, rapport du temps de l'état haut sur une période est

$$\alpha = \frac{R_A + R_B}{R_A + 2R_B}.$$

Ce rapport ne peut être inférieur à 1/2, ainsi il n'y a pas de configuration pour laquelle le temps de l'état haut est très faible devant le temps de l'état bas. Par contre on peut faire tendre α vers 1 en choisissant des résistances telles que $R_A \gg R_B$, le temps de l'état haut est alors très grand devant celui de l'état bas. Enfin, en ajoutant une porte NON, on obtient finalement un signal pour lequel l'état haut est faible devant celui de l'état bas.

Q48. On propose la fonction suivante. On notera que pour percevoir l'effet du flanger il faut choisir une fréquence de modulation de l'ordre de quelques hertz.

```python
#On a défini auparavant une liste d'instants 'temps'
import numpy as np

def flanger(e, omega, tau, dtau):
        s = []

        for k in range(len(e)):
                #Calcul du déphasage
```

```
            tau_add = tau + dtau*np.sin(omega*temps[k])

            #On ne modifie plus le signal dès que l'instant déphasé est supérieur
            #au dernier instant du vecteur instants
            if temps[k] + tau_add < temps[-1]:
                #Index de l'instant t + déphasage du vecteur instants
                index_dephasage = np.argmin(np.abs(temps[k]+tau_add-temps))
                s.append( e[k] + e[index_dephasage] )
            else:
                break

        return s
```