

E1 - Révisions et complément sur le filtrage analogique des signaux

Table des matières

Introduction	1
I. Révisions sur les signaux périodiques et le régime forcé	2
II. Analyse fréquentielle des systèmes linéaires	4
1. Introduction aux systèmes linéaires	4
2. Description fréquentielle d'un système linéaire : fonction de transfert	5
3. Diagramme de Bode	6
4. Bande passante	7
5. Lien entre les descriptions temporelle et fréquentielle	7
III. Application au filtrage linéaire	8
1. Principe du filtrage	8
2. Reconstruire le signal de sortie d'un filtre linéaire	9
3. Comportement intégrateur ou dérivateur	10

Introduction

Dans son célèbre morceau « VoodooChild », Jimmy Hendrix utilise sa sensibilité d'artiste en exploitant l'effet « Wah-Wah ». Cet effet est produit en utilisant un filtrage passe bande glissant, qui atténue les hautes et basses fréquences autour d'une fréquence variable .



I. Révisions sur les signaux périodiques et le régime forcé

. Différents types de régimes

- **Régime libre** : le forçage est nul, aucune énergie n'est apportée au système.
- **Régime forcé** : le forçage n'est pas nul, un générateur apporte de l'énergie au système.
- **Régime permanent** ou établi : la réponse est de la même forme que le forçage.
- **Régime transitoire** : régime qui suit un changement de forçage et qui précède le régime permanent.

. Caractériser un signal périodique

Un signal $s(t)$ est **périodique** si et seulement si il existe une **période** T minimale telle que, pour tout instant t , on a :

Pour les signaux périodiques, on définit :

- La **fréquence** f d'un signal :
- La **pulsation** ω :
- La **valeur moyenne** du signal périodique $s(t)$ de période T :
- La **valeur efficace** qui correspond à la valeur constante qui fournirait la même puissance. Pour un signal périodique $s(t)$ de période T :

Remarque : On peut montrer pour un signal sinusoïdal $s(t) = S \sin(\omega t)$ que $s_{\text{eff}} = \frac{S}{\sqrt{2}}$.

. Rappels sur les signaux harmoniques et la représentation complexe

Un **signal harmonique**, aussi appelé **signal sinusoïdal** s'écrit :

- S l'amplitude ;
- ω la pulsation ;
- φ la phase à l'origine.

À ce signal est associée sa **représentation complexe**, définie par :

Avec $\underline{S}$, l'**amplitude complexe** :

On a alors :

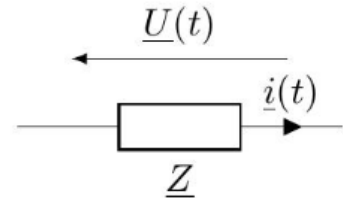
et

On rappelle qu'en représentation complexe, la dérivation temporelle du signal complexe $\underline{s}(t)$ correspond à une multiplication par $j\omega$:

De la même manière, une intégration temporelle correspond à une division par $j\omega$.

. Impédances complexes

On définit **l'impédance complexe** $\underline{Z}$ d'un dipôle comme le rapport entre la tension $\underline{u}(t)$ et l'intensité du courant $\underline{i}(t)$ **en convention récepteur** :



L'impédance électrique $\underline{Z}$ a la dimension d'une résistance, l'unité de son module est l'ohm.

On rappelle les impédances des dipôles usuels :

pour une résistance R ,

pour une inductance L ,

pour une capacité C .

. Spectre d'un signal périodique

Tout signal $s(t)$ périodique de fréquence f et de forme quelconque peut se décomposer en une somme de signaux harmoniques de fréquences multiples de f .

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \quad \text{avec } S_n \geq 0 \text{ et } \varphi_n \in \mathbb{R}$$

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f t) \quad \text{avec } A_n \text{ et } B_n \text{ quelconques}$$

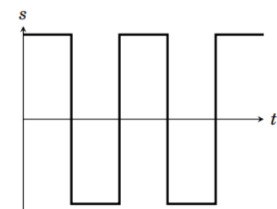
Cette écriture est appelée **développement en série de Fourier** ou **décomposition de Fourier** de $s(t)$:

- Terme constant S_0 : **composante continue**, elle donne la **valeur moyenne** du signal.
- Terme $n = 1$: **fondamental**, sa fréquence est égale à la **fréquence du signal**.
- Termes $n \geq 2$: **harmonique de rang n** , dont la fréquence est un multiple entier de la fréquence fondamentale.

L'ensemble des fréquences présentes dans la décomposition de Fourier de $s(t)$ définit son **spectre**.

Exemple : Pour un signal carré de période T_1 et d'amplitude A :

$$s(t) = \begin{cases} A, & \text{si } t \in [nT_1; (n + \frac{1}{2})T_1] \\ -A, & \text{si } t \in [(n + \frac{1}{2})T_1; (n + 1)T_1] \end{cases}$$

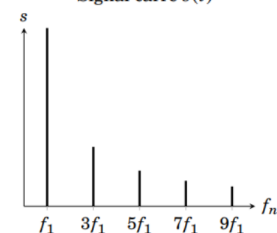


Signal carré $s(t)$

La décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$s(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_1 t)$$

$$s(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\sin(2\pi f_1 t) + \frac{1}{3} \sin(6\pi f_1 t) + \frac{1}{5} \sin(10\pi f_1 t) + \dots \right]$$



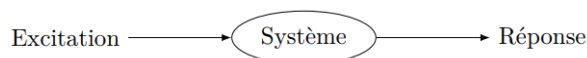
Représentation du spectre $\hat{s}(f)$ du signal carré

Remarque : On peut généraliser à un signal non périodique, la somme est alors remplacée par une intégrale.

II. Analyse fréquentielle des systèmes linéaires

1. Introduction aux systèmes linéaires

On considère ici de façon générale les systèmes physiques et leurs réponses à une excitation :



Un système linéaire, invariant dans le temps est un système qui obéit aux propriétés :

— de linéarité entre l'entrée et la sortie, on parle de **principe de superposition**.

$$\left. \begin{array}{l} e_1(t) \rightarrow (S) \rightarrow s_1(t) \\ e_2(t) \rightarrow (S) \rightarrow s_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) \rightarrow (S) \rightarrow \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) \\ \forall (\lambda_1 ; \lambda_2) \end{array}$$

— d'invariance temporelle. Cela signifie en particulier que l'on néglige tout phénomène de vieillissement et que la réponse à une même excitation est toujours la même.

$$e(t) \rightarrow (S) \rightarrow s(t) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} e(t + \tau) \rightarrow (S) \rightarrow s(t + \tau) \\ \forall \tau \end{array} \right.$$

Les systèmes décrits par une équation différentielle linéaire à coefficients constants vérifient les propriétés des systèmes linéaires à invariance temporelle. Dans le cas général, ces systèmes sont décrits par une équation de la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s}{dt^i}(t) = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k e}{dt^k}(t)$$

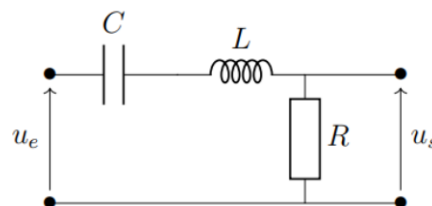
avec tous les a_i et b_k des coefficients constants.

Tous les systèmes électroniques composés uniquement de composants linéaires comme les résistances, les condensateurs et les inductances, sont descriptibles par une telle équation différentielle. Par analogie, il en est de même pour tous les systèmes mécaniques soumis à des forces constantes ou linéaires en la vitesse.

Application n°1 : Déterminer l'équation différentielle d'un circuit

Énoncé :

Établir la relation différentielle entre u_s et u_e dans le circuit.



Correction :

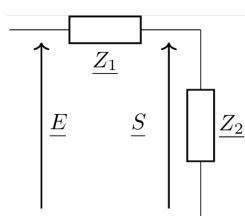
2. Description fréquentielle d'un système linéaire : fonction de transfert

Les signaux harmoniques jouent un rôle fondamental dans l'étude des systèmes linéaires grâce à l'analyse de Fourier. **Si le signal d'entrée d'un système linéaire est un signal harmonique de pulsation ω , alors en régime permanent le signal de sortie est également harmonique de même pulsation ω , mais les deux signaux n'ont pas forcément la même amplitude et peuvent être déphasés.**

Pour caractériser les systèmes linéaires, on définit la **fonction de transfert** comme le rapport des amplitudes complexes des signaux de sortie et d'entrée en fonction de la pulsation ω :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$$

Méthode : Déterminer une fonction de transfert



Pour déterminer la fonction de transfert, il faut identifier des équivalences aux associations série et parallèle afin de mettre le circuit sous la forme ci-contre, puis appliquer un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Pour écrire la fonction de transfert sous forme canonique, il est souvent judicieux d'utiliser l'admittance équivalente $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$:

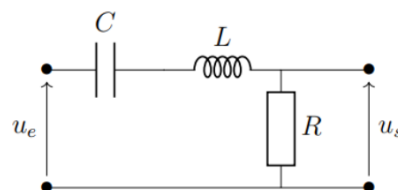
$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \equiv \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_2}$$

Application n°2

Énoncé :

Établir la fonction de transfert du circuit ci-contre et l'écrire sous forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$



Correction :

3. Diagramme de Bode

Le **diagramme de Bode** d'un système linéaire est une double représentation graphique de sa fonction de transfert en fonction de la pulsation ω (graduée selon une **échelle logarithmique**.):

- Un **diagramme de gain** : $G_{dB} = 20 \log |H|$ en fonction de ω ;
- Un **diagramme de phase** : $\arg(H)$ en fonction de ω .

La définition du gain est à connaître dans les deux sens :

$$G_{dB} = 20 \log |H| \iff |H| = 10^{G_{dB}/20}$$

Plutôt qu'un tracé précis du diagramme de Bode, on commence souvent par un **diagramme de Bode asymptotique**, construit à partir des **limites à basse et à haute fréquence**.

Méthode : Tracer un diagramme de Bode asymptotique

1. Étudier séparément les limites basse et haute fréquence de la fonction de transfert ;
2. Pour chaque limite, commencer par calculer la fonction de transfert équivalente en ne conservant que les termes dominants du numérateur et du dénominateur ;
3. Dans un second temps, calculer le module et l'argument pour obtenir les équations des asymptotes ;
4. Pour un deuxième ordre, l'allure du diagramme réel est précisée en calculant explicitement la valeur en $\omega = \omega_0$.

Application n°3

Énoncé : On considère la fonction de transfert obtenue dans l'exercice 2 et mise sous forme canonique :

$$H = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Tracer le diagramme de Bode en gain pour $Q = 10$ et $Q = 0,1$ en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

Correction :

4. Bande passante

On appelle **bande passante** à -3 dB l'intervalle de fréquences sur lequel le gain vérifie :

$$G_{\text{dB}} \geq G_{\text{dB,max}} - 3\text{ dB}$$

où $G_{\text{dB,max}}$ est la valeur maximale du gain en décibels.

Cette valeur de -3 dB est conventionnelle : elle correspond à une division du module de la fonction de transfert par $\sqrt{2}$:

$$|H| \geq \frac{|H|_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

La bande passante est délimitée par une ou deux **pulsations de coupure** ω_c , telles que :

$$G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB,max}} - 3\text{ dB}$$

- la bande passante d'un filtre passe-bas est l'intervalle $[0, \omega_c]$;
- celle d'un filtre passe-haut est $[\omega_c, +\infty[$;
- celle d'un filtre passe-bande est $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$;
- celle d'un filtre coupe-bande est $[0, \omega_{c1}] \cup [\omega_{c2}, +\infty[$.

Application n°4 : Déterminer une bande passante

Énoncé :

Sur les diagrammes de Bode de l'application n°3, déterminer la bande passante des deux systèmes linéaires.

Correction :

5. Lien entre les descriptions temporelle et fréquentielle

Comme les descriptions temporelle et fréquentielle d'un système linéaire décrivent le même système, elles ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Passer de la représentation fréquentielle à la représentation temporelle nécessite d'exprimer la fonction de transfert du système par un polynôme de la variable $j\omega$ et de remplacer cette variable par l'opérateur de dérivation (propriété de la représentation complexe).

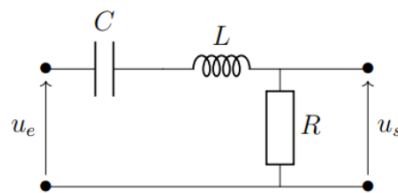
Application n°5 : Obtenir l'équation différentielle à partir de la fonction de transfert

Énoncé :

On reprend le circuit ci-contre, dont la fonction de transfert a été établie à l'application n°2 et s'écrit

$$H = \frac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} - \frac{j}{RC\omega}}$$

Retrouver l'équation différentielle obtenue dans l'application n°1.



Correction :

III. Application au filtrage linéaire

1. Principe du filtrage

Le **filtrage** consiste à sélectionner certaines fréquences d'un signal complexe tout en atténuant ou en supprimant les autres.

Exemples :

- Dans une chaîne hi-fi, différents haut-parleurs sont adaptés à des gammes de fréquences particulières (*tweeter*, médium, *subwoofer*). Il est donc nécessaire d'envoyer à chacun uniquement la partie du signal audio qu'il peut restituer efficacement.
- La température extérieure présente des variations journalières, saisonnières ou annuelles, correspondant à des fréquences de plus en plus basses. Construire une cave en profondeur permet de stabiliser la température de conservation du vin : les variations rapides sont atténuées, ce qui revient à filtrer les hautes fréquences.
- Lorsqu'on percute un diapason, celui-ci est excité par un large spectre de fréquences. Pourtant, sa réponse acoustique est essentiellement constituée de la fréquence propre, par exemple le *La* à 440 Hz.

Un système linéaire peut être utilisé comme filtre car, lorsqu'il est soumis à un signal sinusoïdal, il fournit en sortie un signal sinusoïdal de même fréquence, mais dont l'amplitude et la phase peuvent être modifiées. Il est donc possible en utilisant l'analyse de Fourier (un signal périodique quelconque peut être exprimé comme une somme de signaux sinusoïdaux), de choisir les caractéristiques du filtre de manière à ce que certaines fréquences du signal d'entrée soient transmises tandis que d'autres soient atténuées.

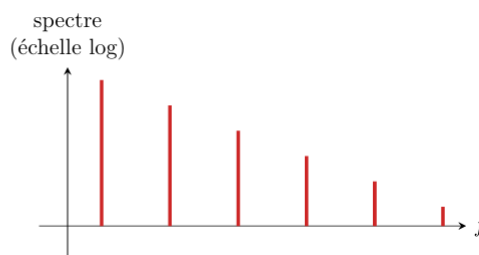
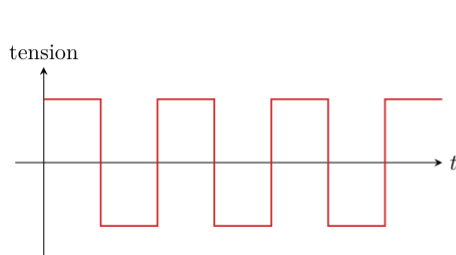
Pour caractériser un filtre, on s'intéressera notamment à :

- Le **type de filtre** : passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande (ou réjecteur de bande) ;
- Sa ou ses **fréquences de coupure**, qui délimitent la **bande passante** et sont généralement définies à -3 dB par rapport au gain maximal ;
- Son **gain**, qui caractérise l'amplification ou l'atténuation du signal dans la bande passante ;
- Son **efficacité d'atténuation** des fréquences situées en dehors de la bande passante, caractérisée notamment par la pente des asymptotes du diagramme de Bode. Plus l'ordre du filtre est élevé, plus les asymptotes peuvent être pentues.

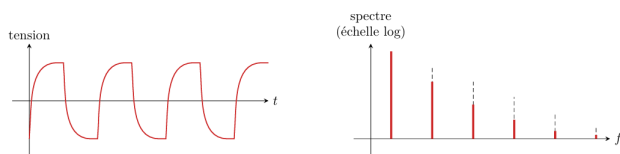
Application n°6 : Effet d'un filtre sur un signal périodique

Énoncé : Considérons pour comprendre le filtrage d'un signal créneau non-bruité. On se limite ici à des considérations qualitatives assez simples, en particulier rien n'est précisé sur la fréquence de coupure et l'ordre des filtres envisagés qu'on suppose simplement « bien choisis ».

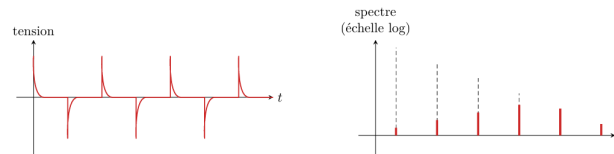
Signal d'entrée :



Effet d'un filtre passe-bas :



Effet d'un filtre passe-haut :



Décrire dans le domaine spectral et le domaine temporel, l'effet d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut en s'aidant du tableau ci-dessous.

Correction :

	Effet du filtre passe-bas	Effet du filtre passe-haut
Domaine spectral	harmoniques BF :	harmoniques BF :
	préservées atténuées	préservées atténuées
	harmoniques HF :	harmoniques HF :
	préservées atténuées	préservées atténuées
Domaine temporel	Allure du signal :	Allure du signal :
	préservée perdue	préservée perdue
	Effet sur les discontinuités :	Effet sur les discontinuités :
	préservées lissées	préservées lissées

On retiendra que les **harmoniques basses fréquences** codent l'information sur l'**allure globale du signal** tandis que les **harmoniques hautes fréquences** celle sur ses **variations brutales** (détails fins, éventuelles discontinuités, bruit).

2. Reconstruire le signal de sortie d'un filtre linéaire

Pour étudier la réponse d'un filtre linéaire à un forçage quelconque dépendant du temps, il suffit de connaître la décomposition de Fourier du forçage et la réponse du filtre à tout forçage harmonique (la fonction de transfert). La réponse totale s'obtient en additionnant la réponse à chaque composante harmonique du forçage.

Méthode : Déterminer le signal en sortie d'un filtre

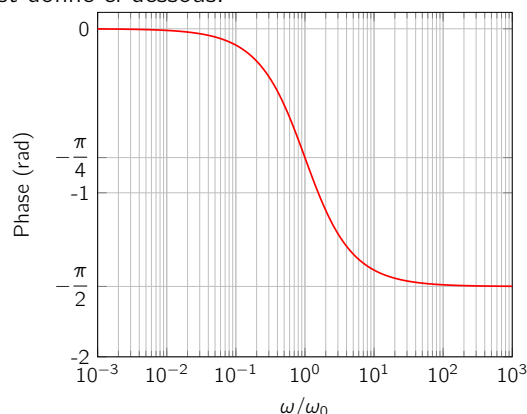
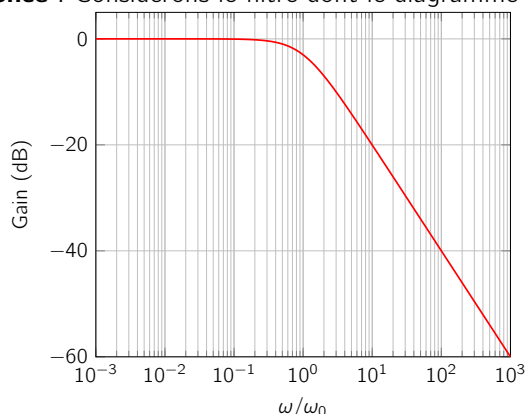
1. Écrire le développement de Fourier du signal d'entrée : $e(t) = E_0 + \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n^{(e)})$
2. En traitant séparément chaque harmonique du signal d'entrée, déterminer avec la fonction de transfert l'amplitude et la phase de chaque harmonique du signal de sortie :

$$S_n = |H(\omega_n)| E_n = 10^{G_{dB}(\omega_n)/20} E_n \quad \text{et} \quad \varphi_n^{(s)} = \varphi_n^{(e)} + \arg H(\omega_n)$$

3. Par linéarité, le signal de sortie est la somme (= la superposition) de ces harmoniques que l'on vient de déterminer : $s(t) = S_0 + \sum_n S_n \cos(\omega_n t + \varphi_n^{(s)})$

Application n°7 : Déterminer le signal en sortie d'un filtre

Énoncé : Considérons le filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



1. Identifier la nature et l'ordre du filtre.
2. On envoie en entrée du filtre le signal $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t) + E_3 \cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_1 = \omega_0/100$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 100\omega_0$. Donner le signal de sortie.
3. On envoie en entrée un signal créneau de pulsation $\omega_0/1000$. Prévoir qualitativement l'allure du signal de sortie.

Correction :

3. Comportement intégrateur ou dérivateur

Les filtres classiques ont une fonction de transfert qui, dans la **bande atténuée**, se simplifie souvent jusqu'à prendre une forme mathématique qui montre que le filtre se comporte pour ces pulsations comme un **intégrateur** ou un **dérivateur** :

- Un filtre est **intégrateur** dans une bande atténuée si on peut écrire à l'intérieur de cette bande, A étant une constante réelle :

$$\underline{H}(j\omega) \sim \frac{A}{j\omega} \Leftrightarrow G(\omega) \sim \frac{A}{\omega} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \sim -\frac{\pi}{2}$$

La courbe de gain du diagramme de Bode a dans ce cas une **asymptote de pente -20 dB /décade**; c'est donc en particulier le cas d'un filtre **passe-bas** et **passe-bande** après la bande passante.

- Un filtre est **dérivateur** dans une bande atténuée si on peut écrire à l'intérieur de cette bande, A étant une constante réelle :

$$\underline{H}(j\omega) \sim Aj\omega \Leftrightarrow G(\omega) \sim A\omega \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) \sim \frac{\pi}{2}$$

La courbe de gain du diagramme de Bode a dans ce cas une **asymptote de pente +20 dB /décade**; c'est donc en particulier le cas d'un filtre **passe-haut** et **passe-bande** avant la bande passante.