

Exercices d'application :□ **Exercice 1.1. Spectre et forme d'un signal ★**

1. On sait que les signaux discontinus ont des spectres riches en harmonique de rang élevé ; les spectres (D) et (E) sont donc associés aux signaux (2) et (6).

On sait par ailleurs que la composante continue correspond à la moyenne temporelle du signal ; des 2 signaux (2) et (6), seul le signal (2) a une moyenne non nulle. On en conclut que le spectre (D) est celui du signal (2) et le spectre (E) est celui du signal (6).

Le signal (3) est un triangle, on sait que son spectre a également une infinité d'harmoniques, ainsi qu'une composante continue non nulle ; son spectre est donc le (C).

Des trois signaux restants, seul le signal (4) a une moyenne non nulle, donc son spectre est le (A). Enfin, le signal (1) est la somme de deux sinusoides tandis que le signal (5) est la somme de quatre sinusoides ; le spectre du signal (1) est le spectre (B) et celui du signal (5) le spectre (F).

□ **Exercice 1.2. Linéarité et caractéristique d'un filtre ★**

1. Le sinus est une fonction isomorphe des filtres linéaires. Cela signifie qu'un filtre linéaire ne peut pas faire apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre.

Le filtre (1) comporte 2 raies supplémentaires à 5 et 6 kHz. Il est donc non linéaire.

Par contre, les filtres (2) et (3) semblent linéaires.

 *Un filtre linéaire ne peut pas faire apparaître de nouvelles raies, mais à l'inverse, il peut en faire disparaître : c'est le principe du filtrage.*

2. Le filtre (2) supprime la raie 1, atténue un peu la raie 2, et garde inchangées les raies 3 et 4. Il s'agit d'un passe-haut dont la fréquence de coupure est voisine de 2 kHz. Il pourrait aussi s'agir d'un passe-bande dont la bande passante est $[2 \text{ kHz} - f_{\text{coup2}}]$ avec $f_{\text{coup2}} > 4 \text{ kHz}$.

Le filtre (3) garde intactes les raies 1 et 2, atténue la raie 3, et supprime la raie 4. C'est un filtre passe-bas de fréquence de coupure voisine de 3 kHz.

□ **Exercice 1.3. Filtre RL ★**

1)

A basses fréquences la bobine est équivalente à un fil.

A hautes fréquences la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.*

Le filtre RL est un passe-haut.

2)

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jL\omega}{jL\omega + R} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

3)

$$G = |\underline{H}| = \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$G_{dB} = 20 \log(G) = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

4) A basses fréquences :

$$\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$$

$$G_{dB,BF} = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Asymptote oblique à +20dB/décade.

A hautes fréquences :

$$\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$$

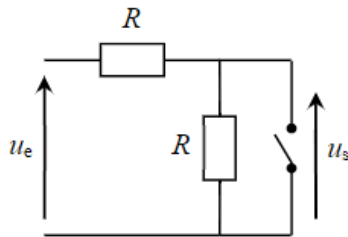
$$G_{dB,HF} = 0$$

Asymptote horizontale à 0 dB.

Exercices d'entraînement :

□ Exercice 1.4. Filtrage RC* ★★

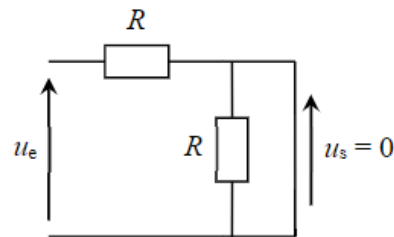
1. En basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$) le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où :



Pont diviseur de tension : $u_s = \frac{R_0}{R + R_0} u_e$.

Le signal de sortie est négligeable pour les hautes fréquences, important pour les basses fréquences : il s'agit d'un filtre passe-bas.

En haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$) le condensateur se comporte comme un fil, d'où :



La tension u_s est la tension aux bornes d'un fil, elle est donc nulle.

⇒ Méthode 7.1

2. On considère l'association parallèle RC comme un dipôle d'impédance Z_{eq} (dont l'admittance Y_{eq} est obtenue immédiatement). Diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{Z_{\text{eq}}}{R + Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{RY_{\text{eq}} + 1}$,

avec $Y_{\text{eq}} = jC\omega + \frac{1}{R}$, soit $\underline{H} = \frac{1}{jRC\omega + 2}$. En posant $x = RC\omega$ on obtient $\underline{H} = \frac{1}{2 + jx}$.

✎ On peut mettre la fonction de transfert sous forme canonique avec une partie réelle unitaire pour le dénominateur soit $\underline{H} = \frac{1/2}{1 + jx/2}$.

⇒ Méthodes 7.2, 7.3

3. Le gain de la fonction de transfert s'écrit $G = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$, il est alors évident que $G_{\text{max}} = \frac{1}{2}$, qui correspond à la valeur $|H_0|$ si on avait fait une identification avec la forme canonique.

Par définition, $G(x_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x_c^2/4}}$, donc $4 + x_c^2 = 8$ soit $x_c = 2$. On obtient la

pulsation de coupure $\omega_c = \frac{2}{RC}$.

☛ De façon inhabituelle, cet énoncé définit une pulsation réduite x qui n'est pas égale à ω/ω_c , on trouve donc une valeur de x_c différente de 1.

4. – Pour $x \ll 1$, la fonction de transfert devient $\underline{H}(x) \approx \frac{1}{2}$.

Alors $G_{dB} = 20 \log(1/2) = -6 \text{ dB}$, d'où une asymptote horizontale à -6 dB en basse fréquence sur la courbe de gain. Et $\varphi = \arg(1/2) = 0$, d'où l'asymptote pour la phase en BF.

– Pour $x \gg 1$, $\underline{H}(x) \approx \frac{1}{jx} = -\frac{j}{x}$.

Alors $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) = -20 \log x$: le facteur -20 devant $\log x$ indique une pente de l'asymptote de -20 dB/décade . Et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ qui représente l'asymptote de la phase en HF.

On détermine la fréquence de coupure par intersection des asymptotes : on lit $f_c = 300 \text{ Hz}$. Or

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{2}{RC} \text{ donc } RC = \frac{1}{\pi f_c}. \text{ AN } \boxed{RC = 1 \text{ ms}}.$$

On peut aussi déterminer la fréquence de coupure en cherchant la fréquence pour laquelle le gain est inférieur de 3 décibels à sa valeur maximale (abscisse -9 environ), ou encore celle où la phase vaut -45° .

⇒ Méthode 7.5

5. À haute fréquence, $\underline{H}(x) \approx \frac{1}{jx}$. On reconnaît l'opérateur intégration, caractérisé sur un diagramme de Bode par une pente de -20 dB/décade (division par ω) et un déphasage qui tend vers -90° (division par j).

6. Pour 900 Hz , on lit $G_{dB} = -16 \text{ dB} = 20 \log G$. On en déduit $G = 10^{-16/20} = 0,16 = \frac{U_{sm}}{U_{em}}$. Donc

$$U_{sm} = G \cdot U_{em} = 0,16 \cdot 10 \text{ soit } \boxed{U_{sm} = 1,6 \text{ V}}.$$

□ Exercice 1.5. Filtre à pont de Wien ★★

1)

Il s'agit d'un passe bande.

2)

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\frac{R}{jC\omega}}{\frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z}_{eq}} + \frac{1}{j\underline{Z}_{eq}C\omega}}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + (1 + jRC\omega) + \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega}} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}} = \frac{1}{3(1 + \frac{jRC\omega}{3} - j\frac{1}{3RC\omega})}$$

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1 + j\frac{1}{3}(RC\omega - \frac{1}{RC\omega})}$$

$$H_0 = \frac{1}{3}, \quad Q = \frac{1}{3} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

3) Calculons le gain et la phase :

$$G = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

A basse fréquence :

$$\frac{\omega_0}{\omega} \gg 1 \text{ et } \frac{\omega_0}{\omega} \gg \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$G_{BF} = \frac{H_0 \omega}{Q \omega_0}$$

$$G_{db,BF} = 20 \log(\omega) + 20 \log \left(\frac{H_0}{Q \omega_0} \right)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

A haute fréquence :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \text{ et } \frac{\omega}{\omega_0} \gg \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$G_{BF} = \frac{H_0 \omega_0}{Q \omega}$$

$$G_{db,BF} = -20 \log(\omega) + 20 \log \left(\frac{H_0}{Q \omega_0} \right)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$5) : \omega_0 = \frac{1}{10^3 \times 500 \times 10^{-9}} = 2000 \text{ rad/s}$$

$$s(t) = \frac{E_0}{10} \cos(\omega t) + \frac{E_0}{3} \cos(10 \omega t) + \frac{E_0}{10} \cos(100 \omega t)$$

□ Exercice 1.6. Comportement dérivateur et intégrateur ★★

1. La fonction de transfert H_1 correspond à un filtre passe-bas d'ordre 2; la fonction de transfert H_2 correspond à un filtre passe-haut d'ordre 2.
2. La grande différence d'ordre de grandeur entre ω_1 et ω_2 permet d'envisager trois domaines : $\omega \ll \omega_1, \omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$ et $\omega \gg \omega_2$.
3. Les approximations dans les différents domaines sont rassemblées dans le tableau suivant :

	$\omega \ll \omega_1$	$\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$	$\omega \gg \omega_2$
$1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$	1	$j \frac{\omega}{\omega_1}$	$j \frac{\omega}{\omega_1}$
$1 + j \frac{\omega}{\omega_2}$	1	1	$j \frac{\omega}{\omega_2}$
$H_1(j\omega)$	1	$\frac{\omega_1}{j\omega}$	$\frac{-\omega_1 \omega_2}{\omega^2}$
$H_2(j\omega)$	$-\frac{\omega^2}{\omega_2^2}$	$\frac{\omega_1}{\omega_2^2} j\omega$	$\frac{\omega_1}{\omega_2}$

Ainsi, dans le domaine $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, le filtre 1 est intégrateur et le filtre 2 est dérivateur.