

E2 - Conversion analogique numérique et filtrage numérique

Table des matières

Introduction	1
I. Numérisation d'un signal	2
1. Notion de signal	2
2. Intérêt de la numérisation	2
3. Structure d'une chaîne d'acquisition et de numérisation	2
II. Échantillonnage	3
1. Définition	3
2. Spectre d'un signal échantillonné	4
3. Critère de Nyquist-Shannon	7
III. Quantification et résolution	7
IV. Filtrage numérique	8
1. Exemple : filtre passe-bas du premier ordre	8
2. Limitations	10
3. Génération d'un signal analogique à partir d'un signal numérique	10

Introduction

Pourquoi certaines vidéos apparaissent-elles parfaitement fluides, alors que d'autres semblent « saccader » ou perdre des images ?

La fluidité dépend de la cadence d'images, c'est-à-dire de la fréquence d'échantillonnage temporel. Si cette fréquence n'est pas suffisante par rapport aux variations du signal, on perd de l'information : c'est le cœur du **critère de Nyquist-Shannon**.

I. Numérisation d'un signal

1. Notion de signal

- On appelle **signal** une grandeur physique X porteuse d'information.
- Le signal est dit **analogique** si la grandeur physique $X(t)$ peut prendre un ensemble continu de valeurs et est définie sur un intervalle de temps continu.
- Le signal est dit **numérique** si la grandeur physique prend des valeurs appartenant à un ensemble discret/fini $X_1, X_2, \text{etc.}$ et ne varie qu'à certains instants discrets $t_1, t_2, \text{etc.}$. Le nombre de valeurs possibles prises par le signal est généralement une puissance de 2.

2. Intérêt de la numérisation

Pourquoi numériser un signal ?

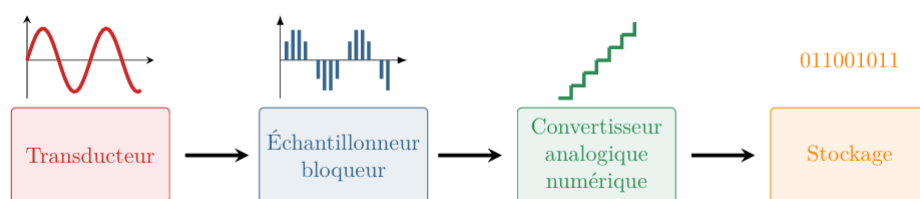
- pour le **stocker** : par exemple sur un disque dur d'un ordinateur, une carte SD dans un smartphone, etc. . .
- pour **calculer** : il est beaucoup plus simple d'effectuer des opérations sur un signal numérique à l'aide d'un programme informatique plutôt que sur un signal analogique avec des circuits électroniques.

Exemple : les oscilloscopes modernes numérisent le signal d'entrée pour pouvoir l'analyser.

- pour le **transmettre** : comme un signal numérisé varie « par paliers », il est moins sensible au bruit lors d'une transmission car même en présence de perturbations aléatoires il sera possible de distinguer les différents paliers.

Exemple : c'est pour cette raison que la télévision hertzienne a été remplacée par la TNT, télévision numérique terrestre.

3. Structure d'une chaîne d'acquisition et de numérisation

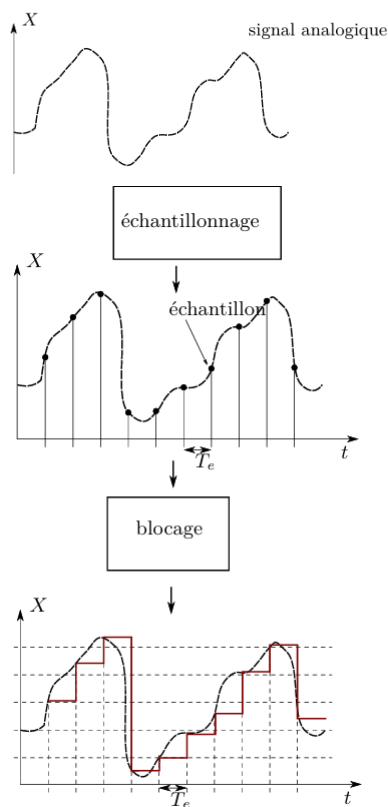


Bloc 1 : transducteur

Le signal analogique d'intérêt (température, vitesse, position, etc.) est converti en tension analogique.

Bloc 2 : échantillonneur-bloqueur

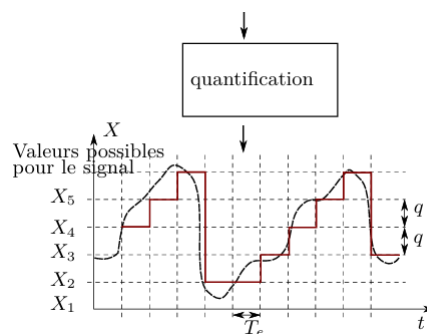
La tension analogique est envoyée en entrée d'un échantillonneur-bloqueur. Son rôle est de bloquer la valeur de la tension à un niveau constant pendant une durée T_e appelée **période d'échantillonnage**. La valeur est actualisée tous les T_e .



Bloc 3 : convertisseur analogique numérique

En sortie de l'échantillonneur-bloqueur, la tension est toujours analogique : elle peut prendre n'importe quelle valeur. Comme un système numérique ne peut traiter que des données codées en binaire avec un nombre de bits fini, il faut discrétiser les valeurs prises. C'est le rôle du convertisseur analogique numérique, usuellement abrégé CAN, qui attribue à la tension la valeur binaire permise la plus proche (ou immédiatement inférieure) à sa valeur réelle.

Les cartes d'acquisition, par exemple Sysam ou Arduino, contiennent les deux blocs échantillonneur-bloqueur et CAN.



Bloc 4 : stockage

Les valeurs de sortie du CAN sont enfin stockées en mémoire pour être affichées ou manipulées.

II. Échantillonnage

1. Définition

L'**échantillonnage** consiste à prélever les valeurs du signal $s(t)$ étudié à des instants régulièrement espacés, de la forme $t_k = kT_e$ où

- $k \in [0, \dots, N - 1]$, N étant le **nombre de points d'acquisition** ;
- T_e est la **période d'échantillonnage** ; de là on définit $f_e = \frac{1}{T_e}$ la **fréquence d'échantillonnage**.

Application n°1

Énoncé : Simulons numériquement l'échantillonnage à la fréquence f_e d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 .

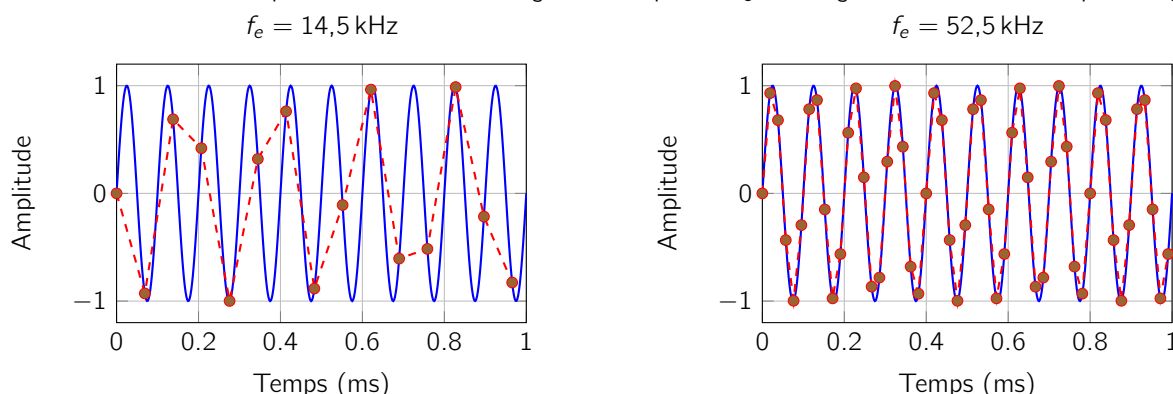


Figure 1 – Différents échantillonnages d'un même signal sinusoïdal. Le signal a pour fréquence $f_0 = 10,0$ kHz. Les fréquences d'échantillonnage correspondant aux deux figures valent respectivement 14,5 kHz et 52,5 kHz.

Proposer une première condition pour que le signal échantillonné soit raisonnablement fidèle au signal analogique.

Correction : Il faut que la fréquence d'échantillonnage soit suffisamment élevée pour que le signal échantillonné soit raisonnablement fidèle au signal analogique. Contrairement à une première intuition, choisir $f_e > f_0$ n'est pas suffisant pour obtenir un signal échantillonné fidèle.

Remarque : Plusieurs signaux analogiques différents peuvent produire le même signal échantillonné (cf figure 2).

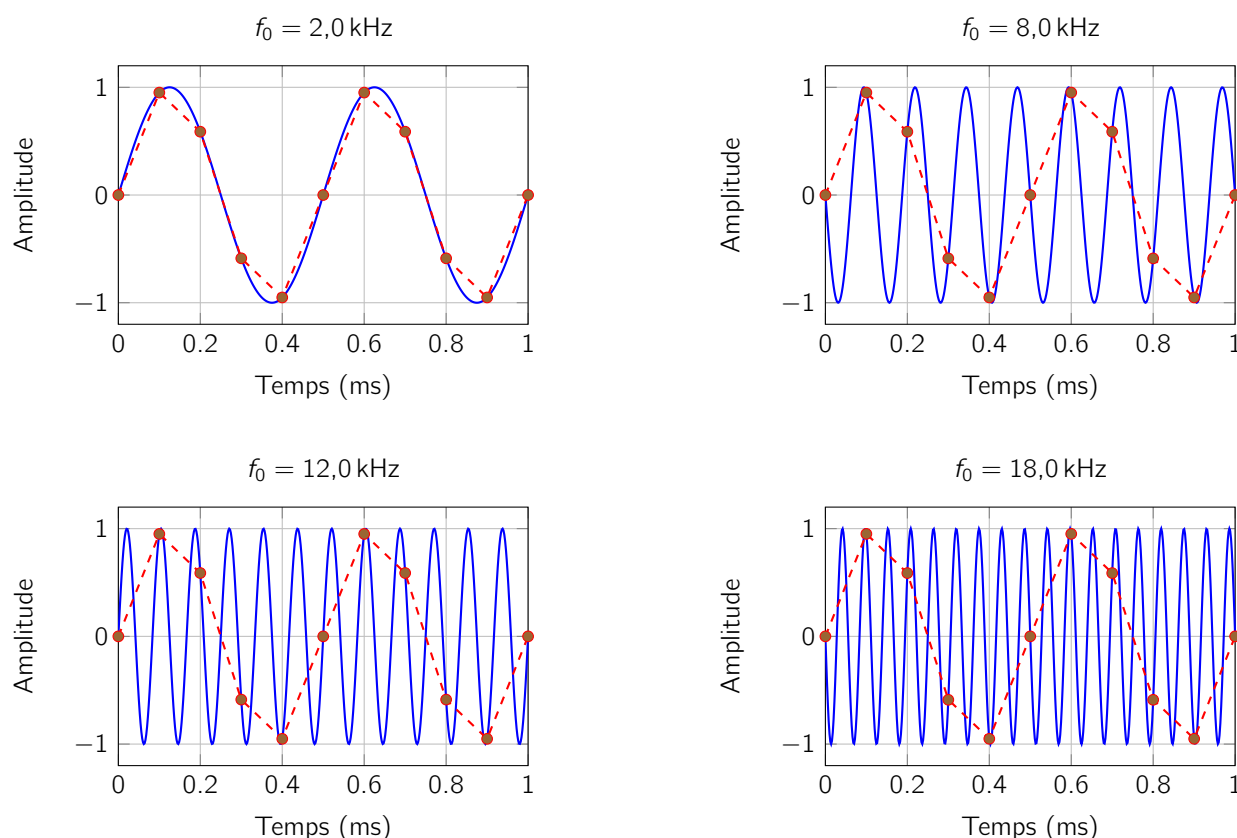


Figure 2 – Un même échantillonnage de différents signaux. La fréquence d'échantillonnage est choisie à $f_e = 10,0 \text{ kHz}$. La fréquence f_0 des signaux correspondant aux différentes figures vaut respectivement 2,0, 8,0, 12,0 et 18,0 kHz.

2. Spectre d'un signal échantillonné

. Aspect mathématique de l'échantillonnage

Mathématiquement, échantillonner un signal consiste à le multiplier par un **peigne de Dirac** $p(t)$ qui vaut 1 tous les $t_k = kT_e$ et 0 sinon. En pratique, le peigne est construit avec une **fonction créneau** ayant un tout petit rapport cyclique (1 – 2%).

De plus, comme toutes les fonctions périodiques, l'analyse de Fourier nous permet d'écrire la fonction peigne de Dirac comme une somme discrète de fonctions sinusoïdales.

Le spectre du signal d'échantillonné possède un fondamental de fréquence f_e et des harmoniques de fréquences multiples de f_e ($2f_e, 3f_e$, etc. . .) :

$$p(t) = P_0 + \sum_k P_k \cos(2\pi k f_e t + \varphi_k)$$

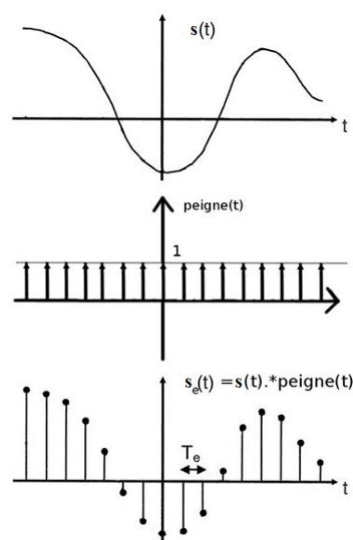
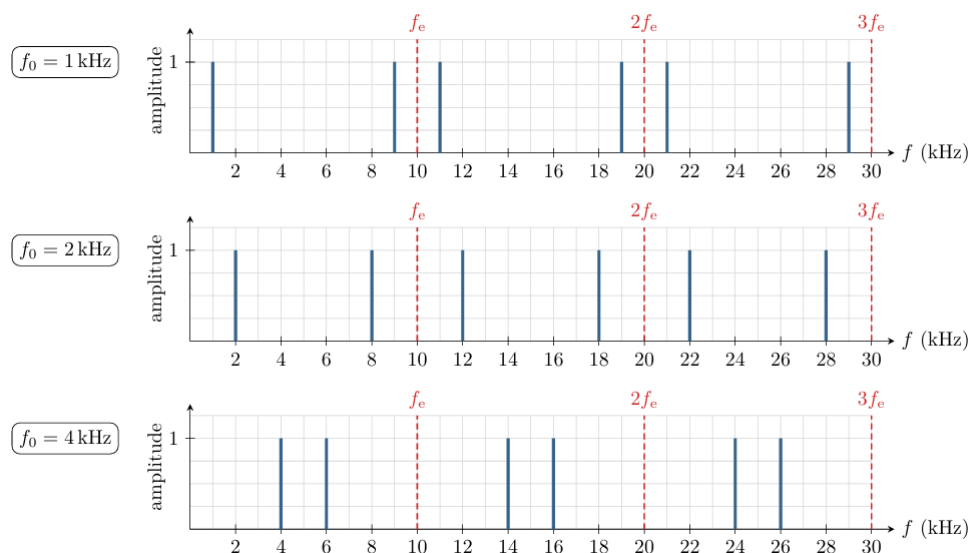


Figure 3 – Principe de l'échantillonnage d'un signal $s(t)$.

. Exemple d'un signal harmonique**Application n°2**

Énoncé : Simulons maintenant l'échantillonnage à la fréquence $f_e = 10$ kHz d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 variable, et le calcul de son spectre. La fonction disponible dans le module `fft` de la bibliothèque `numpy` (`numpy.fft.fft`) utilise l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT en anglais), comme tous les logiciels d'acquisition et traitement de données.



1. Le spectre du signal échantillonné contient-il la fréquence du signal analogique ?
2. Quelles autres fréquences se retrouvent dans le spectre du signal échantillonné ?
3. En supposant le signal analogique de la forme $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, proposer une expression mathématique pour le signal échantillonné $s_e(t)$.

Correction :

1. & 2. Le spectre d'un signal sinusoïdal échantillonné fait apparaître des pics à la fréquence du signal (logique), mais aussi des fréquences de la forme $kf_e \pm f_0$ avec k un entier.

3. Soit un signal sinusoïdal de fréquence f_0 à échantillonner : $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$. Le signal échantillonné s'écrit ainsi :

$$s_e(t) = s(t) \times p(t) \Rightarrow s_e(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \times \left(P_0 + \sum_k P_k \cos(2\pi k f_e t + \varphi_k) \right)$$

soit

$$s_e(t) = AP_0 \cos(2\pi f_0 t) + \sum_k \frac{AP_k}{2} [\cos(2\pi (kf_e - f_0) t + \varphi_k) + \cos(2\pi (kf_e + f_0) t + \varphi_k)]$$

On voit donc que le spectre du signal échantillonné contient, en plus de la fréquence f_0 , les fréquences $kf_e - f_0$ et $kf_e + f_0$, pour tout k .

. Cas général

Si on effectue la même opération d'échantillonnage avec un signal comportant **plusieurs composantes fréquentielles**, entre 0 et $f_{\max}$, on va ainsi observer des « clones » du spectre du signal $s(t)$ de part et d'autre de chacune des fréquences kf_e , entre $kf_e - f_{\max}$ et kf_e d'une part, et entre kf_e et $kf_e + f_{\max}$ d'autre part.

L'effet de l'échantillonnage d'un signal $s(t)$ est donc l'**enrichissement du spectre** de ce signal par un **dédoublé symétrique de ce spectre de part et d'autre de toutes les fréquences kf_e** , où f_e est la fréquence d'échantillonnage.

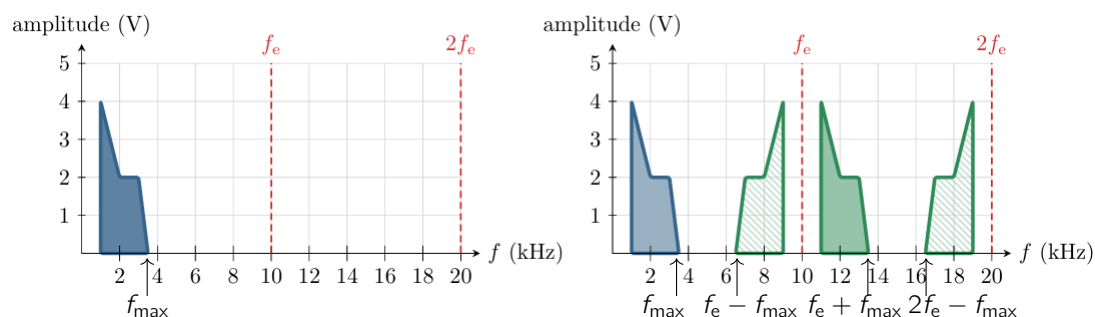


Figure 4 – Spectre d'un signal quelconque échantillonné. Le signal possède un spectre compris entre 1 et 3,5 kHz et il est échantillonné avec la fréquence $f_e = 10$ kHz. La figure de gauche représente le spectre du signal analogique, celle de droite le spectre du signal échantillonné, présentant des répliques du spectre.

Une première difficulté posée par ces répliques du spectre se rencontre lors de la reconstruction du signal à partir du signal échantillonné : en raison de la réplication du spectre, **le signal reconstruit diffère fortement du signal analogique**.

. Repliement spectral

Une seconde difficulté intervient lorsque les spectres du signal et de ses répliques se recouvrent, si bien qu'ils s'additionnent et ne peuvent plus être distingués : c'est le cas de la figure 5. Dans ce cas, **le spectre et ses répliques sont impossibles à séparer**.

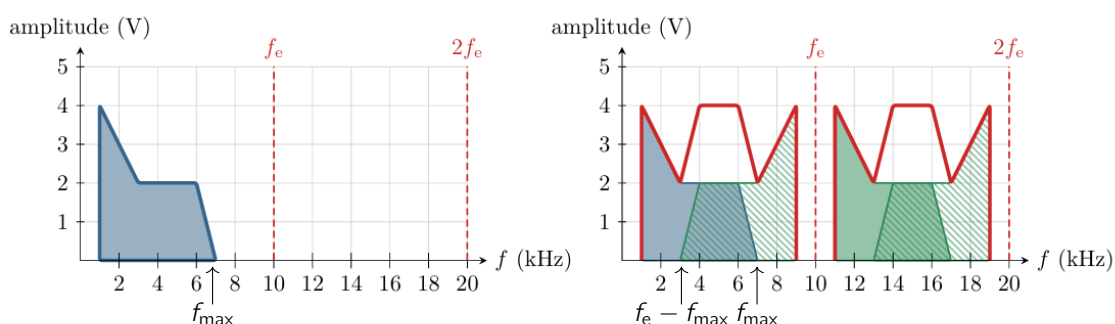


Figure 5 – Spectre d'un signal quelconque échantillonné en présence de recouvrement spectral. Le signal possède un spectre compris entre 1 et 7 kHz et il est échantillonné avec la fréquence $f_e = 10$ kHz. La figure de gauche représente le spectre du signal analogique. La figure de droite représente la construction du spectre du signal échantillonné, en tenant compte du recouvrement spectral.

On appelle **repliement spectral** ou « aliasing » le phénomène de recouvrement du spectre du signal analogique et de ses répliques lors du processus d'échantillonnage. Ce phénomène n'est pas corrigeable par filtrage a posteriori et doit être anticipé en amont de l'acquisition.

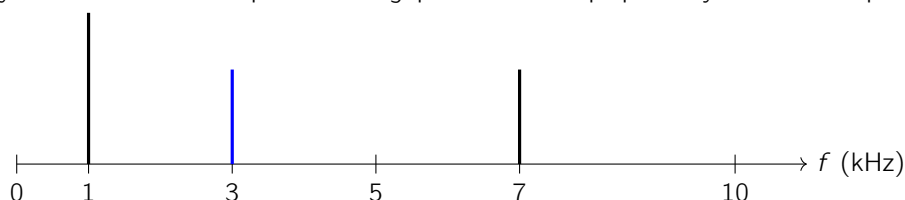
Application n°3

Énoncé : Considérons un signal créneau de fréquence $f_0 = 1$ kHz, décrit par ses premières harmoniques :

$$s(t) = A \sin(2\pi f_0 t) + \frac{2A}{3} \sin(2\pi 7 f_0 t).$$

Pour simplifier, les harmoniques suivantes sont négligées. Ce signal est échantillonné à $f_e = 10$ kHz. Représenter le spectre du signal échantillonné entre 0 et 10 kHz. A-t-on repliement spectral ?

Correction : Il y a un recouvrement du spectre analogique et de ses répliques. Il y a donc un repliement spectral.



3. Critère de Nyquist-Shannon

Pour que le signal numérisé contienne les mêmes informations que le signal analogique, le repliement de spectre est à éviter absolument. Si le spectre du signal est connu à priori, on peut choisir en conséquence la fréquence d'échantillonnage.

Application n°4

Énoncé : Pour éviter le repliement du spectre, il faut qu'aucune composante du spectre ne se recouvre avec sa réplique.

1. Si le signal contient plusieurs fréquences, pour quelle fréquence le risque de recouvrement est-il le plus grand ?
2. Proposer alors une valeur extrême que doit avoir la fréquence d'échantillonnage afin d'éviter un repliement du spectre.

Correction :

1. Cas le pire : pour $f_{\max}$, dont la réplique se trouve à $f_e - f_{\max}$.
2. Conséquence : il faut avoir $f_{\max} < f_e - f_{\max}$ soit $f_e > 2f_{\max}$.

Critère de Nyquist-Shannon : Pour éviter le repliement spectral, la fréquence d'échantillonnage doit vérifier :

$$f_e > 2f_{\max}$$

Remarques :

- les **signaux réels** présentent en général un spectre contenant un **très grand nombre de composantes** (parfois même infini) ; le critère de Nyquist-Shannon est alors impossible à satisfaire. Il existe néanmoins toujours en pratique une fréquence $f_{\max}$ telle que la contribution des fréquences supérieures à l'information portée par le signal $s(t)$ est négligeable. Afin d'éviter que le repliement du spectre, inévitable ici, ne déforme le signal échantillonné, il est nécessaire d'interposer entre le signal d'entrée et le dispositif d'acquisition un **filtre passe-bas** de fréquence de coupure f_c telle que $f_{\max} < f_c$; le filtre utilisé porte le nom de **filtre anti-repliement**.
- le traitement numérique du signal échantillonné peut imposer d'autres contraintes que le critère de Shannon.

III. Quantification et résolution

On appelle **pas** ou **quantum de quantification** l'écart (en volt) entre deux valeurs binaires successives. L'influence du pas de quantification sur le signal numérisé est représenté figure 6.

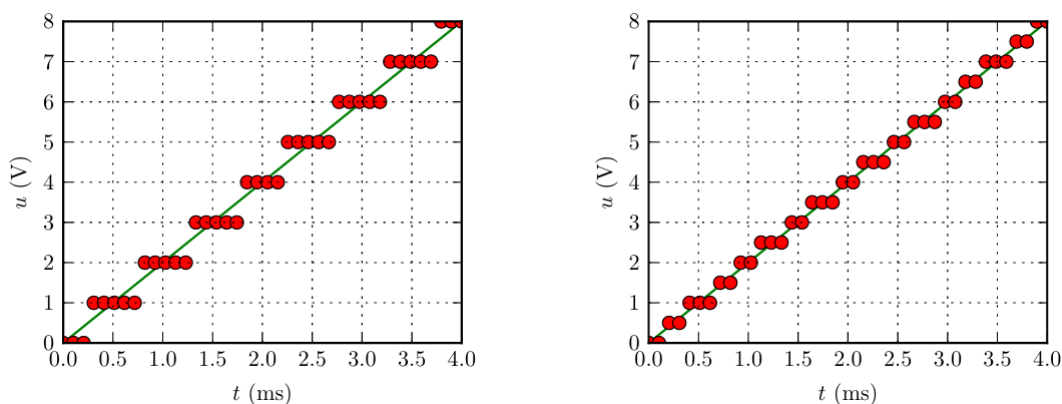


Figure 6 – Deux exemples de numérisation d'une même tension. Le signal analogique est représenté en trait plein bleu, le signal numérisé par les points verts. Dans les deux cas la période d'échantillonnage est de 0,1 ms. Sur la figure de gauche le pas de quantification vaut 1 V alors qu'il vaut 0,5 V sur la figure de droite.

Le pas de quantification est déterminé par le calibre et la résolution de l'acquisition. Ces deux paramètres sont généralement indépendants l'un de l'autre.

- Le **calibre** C donne la gamme de valeurs $\pm C$ que le signal numérisé est susceptible de prendre. Il doit être supérieur à la valeur maximale du signal analogique, sans quoi le signal numérisé fait apparaître un phénomène de saturation. La valeur $2C$, c'est-à-dire la largeur de l'intervalle de valeurs permises, est la **tension de pleine échelle** du CAN.
- La **résolution** N indique le nombre de bits sur lequel le signal numérisé est codé : 2^N valeurs sont possibles dans l'intervalle $[-C, +C]$, ou autrement dit cet intervalle est divisé en $2^N - 1$ intervalles de largeur identique.

Application n°5

Énoncé : Proposer une expression pour le pas de quantification en fonction du calibre et de la résolution

Correction :

Le pas de quantification s'exprime : $p = \frac{2C}{2^N - 1}$

Exemples : La résolution d'un *CD* audio est de 16 bits. Celle d'un pixel d'un appareil numérique reflex (un pixel correspond à une couleur) est de 14 ou 16 bits, mais si elle est comprimée au format jpeg la résolution n'est plus que 8 bits.

IV. Filtrage numérique

Une fois le signal échantillonné, on peut effectuer sur lui des traitements numériques comme du filtrage en s'appuyant sur la puissance de calcul de l'ordinateur.

1. Exemple : filtre passe-bas du premier ordre

Application n°6

Énoncé : On considère un filtre passe-bas du premier ordre, de gain maximum $G_0 = 1$ et de pulsation de coupure $\omega_c = 2\pi f_c$. Sa fonction de transfert s'écrit : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$.

Montrer que, dans le domaine temporel, cette fonction de transfert correspond à : $\frac{1}{\omega_c} \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$.

Correction :

Par définition :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \implies \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) \underline{S} = \underline{E}.$$

Or $j\omega$ correspond à une dérivation temporelle. Ainsi : $\frac{1}{\omega_c} \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$

L'équation différentielle obtenue dans l'application n°6 concerne des grandeurs continues (analogiques). Pour l'utiliser avec des signaux numérisés, il faut la **discrétiser**.

Comme on ne dispose des valeurs des signaux qu'aux instants $t_k = kT_e$, on va remplacer dans cette équation différentielle un signal par sa valeur prise à l'instant t_k . Ainsi $e(t)$ devient $e_k = e(t_k)$ et $s(t)$ devient $s_k = s(t_k)$.

L'équation différentielle devient :

$$\frac{ds}{dt}(t_k) = \omega_c (e_k - s_k).$$

Par ailleurs :

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{s(t+dt) - s(t)}{dt},$$

On fait l'approximation de remplacer la durée élémentaire dt par T_e (c'est la plus petite durée manipulée dans l'échantillonnage) :

$$\frac{ds}{dt}(t_k) = \frac{s(t_k + T_e) - s(t_k)}{T_e} = \frac{s_{k+1} - s_k}{T_e}$$

On en déduit que la relation de récurrence du filtre est donnée par :

$$\frac{s_{k+1} - s_k}{T_e} = \omega_c (e_k - s_k) \iff s_{k+1} = s_k + \omega_c T_e (e_k - s_k)$$

Application n°7 : Simulation numérique d'un filtre passe-bas

Énoncé : On souhaite maintenant simuler numériquement le filtre passe-bas étudié précédemment. On rappelle que sa discrétisation conduit à la relation :

$$s_{k+1} = s_k + \omega_c T_e (e_k - s_k).$$

On considère :

$$f_c = 100 \text{ Hz}, \quad f = 500 \text{ Hz}, \quad f_e = 10 \text{ kHz}.$$

Compléter le programme Python suivant afin de calculer les valeurs successives du signal de sortie s_k .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres
fc = 100
f = 500
fe = 10000

wc = 2 * np.pi * fc
Te = 1 / fe

# Signal d'entrée échantillonné
t = np.arange(0, 0.01, Te)
e = -----

# Calcul du signal de sortie
s = np.zeros(len(t))

for k in range(len(t) - 1):
    s[k+1] = s[k] + wc * Te * (e[k] - s[k]) -----

# Tracé
plt.figure(figsize=(8, 4))

plt.plot(t, e, ".", markersize=5,
         label="Signal d'entrée $e_k$")
plt.plot(t, s, ".", markersize=5,
         label="Signal de sortie $s_k$")

plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Amplitude")
plt.xlim(0, 0.01)
plt.ylim(-1.2, 1.2)
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

1. Compléter les deux lignes manquantes du programme.
2. Exécuter le programme et comparer les signaux d'entrée et de sortie. Retrouve-t-on qualitativement le comportement du filtre passe-bas étudié avec le circuit analogique ?
3. Modifier la valeur de f et vérifier le comportement du filtre pour $f \ll f_c$, $f \simeq f_c$ et $f \gg f_c$.

Correction :

Le signal d'entrée est :

$$e_k = \cos(2\pi f t_k),$$

d'où :

```
e = np.cos(2 * np.pi * f * t)
```

La relation de récurrence donne directement :

```
s[k+1] = s[k] + wc * Te * (e[k] - s[k])
```

On retrouve ainsi numériquement le comportement du filtre analogique : les basses fréquences sont transmises tandis que les hautes fréquences sont atténuées.

2. Limitations

Un **filtre analogique** présente toujours une bande passante d'utilisation limitée, en raison des composants utilisés qui n'ont pas le comportement idéal de leur modèle.

Un **filtre numérique** a lui aussi des limitations, qui ont d'autres origines :

- tout calculateur électronique introduit des **erreurs d'arrondi** ;
- la quantification du signal **approxime les valeurs lues** lors de l'échantillonnage par celles les plus proches manipulables par le calculateur. Le signal filtré n'est donc pas le résultat idéal du filtrage ;
- L'approximation au 1^{er} ordre utilisée pour la dérivée génère des erreurs importantes pour les fréquences de l'ordre de $2f_e$: la **fréquence maximale** d'utilisation du filtre est liée à la fréquence d'échantillonnage du signal d'entrée. On peut contourner ce problème en augmentant f_e ou en utilisant des discrétisations numériques d'ordre supérieur.

3. Génération d'un signal analogique à partir d'un signal numérique

On peut enfin fabriquer un signal analogique à partir du signal numérique que l'on vient de calculer. On peut utiliser pour cela un **convertisseur numérique-analogique** (CNA).