

Conversion analogique-numérique :**□ Exercice 2.1. Enregistrement audio d'un concert ★ (échantillonnage)**

1. Le critère de Shannon devant être respecté pour un bon enregistrement, la fréquence maximale enregistrable est

$$f_{\max} = \frac{f_e}{2} = 22 \text{ kHz}$$

Cette fréquence correspond approximativement à la limite supérieure du domaine audible, ce qui justifie le choix de la fréquence d'échantillonnage. La fréquence minimale est donnée par la résolution spectrale, reliée à la durée totale d'acquisition par

$$f_{\min} = \frac{1}{T} = 2,8 \times 10^{-4} \text{ Hz}$$

2. L'enregistrement stéréo se fait sur deux pistes différentes. Le nombre de valeurs enregistrées est

$$N = 2 \times T \times f_e \simeq 317 \cdot 10^6$$

Chaque valeur occupe 16 bit, soit un total de

$$5,08 \text{ Gbit} = 635 \text{ Mo}$$

□ Exercice 2.2. Echantillonnage et spectre ★ (échantillonnage, repliement de spectre)

1. Comme le critère de Shannon est vérifié pour le spectre 1, alors la fréquence maximale du signal analogique est $f_{\max} = 450 \text{ Hz}$. Puisque $f_{\max} > f_{e2}$, alors le **critère de Shannon n'est pas respecté pour le spectre 2**.
2. Lors de l'échantillonnage, toute composante de fréquence f se retrouve répliquée à la fréquence $f_e - f$. Ainsi, le pic présent dans le spectre 1 à 300 Hz a une réplique dans le spectre 2 à 200 Hz.

□ Exercice 2.3. Effets stroboscopiques ★★ (spectre d'un signal échantillonné)

1. Le signal analogique est la position du repère (formellement l'angle $\theta(t)$ qu'il forme avec une direction de référence). Le signal numérique est ce que perçoit l'œil de l'observateur sous l'éclairage stroboscopique : grâce à la persistance rétinienne et aux flashes du stroboscope, tout se passe comme si la position du repère était échantillonnée puis bloquée entre deux flashes. La fréquence d'échantillonnage est celle des flashes : $f_e = 1/T'$.
2. Pour observer fidèlement le mouvement du repère, il faut qu'il reçoive plusieurs flashes au cours d'un tour : il faut donc avoir $T' \ll T$.
3. Si $T' = T$, alors le repère parcourt exactement un tour entre deux flashes : il apparaît donc immobile car toujours à la même position. Dans le domaine fréquentiel, le spectre du signal analogique présente un pic à $f = f'$, et donc une réplique à $f' - f = 0$, voir figure 1.

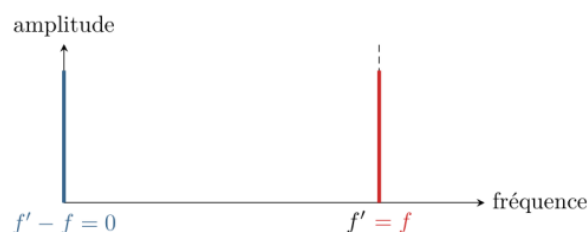


Figure 1 – Spectre pour $T' = T$.

4. Si $T' \gtrsim T$, alors le repère parcourt un peu plus d'un tour complet entre deux flashes... mais l'observateur n'a aucun moyen de voir ce tour complet, il ne peut voir que le «un peu plus» ! Le déplacement apparent du repère semble donc très ralenti. En termes de spectre, on constate l'apparition d'une réplique à basse fréquence, voir figure 2, qui donne la fréquence apparente du mouvement du repère.

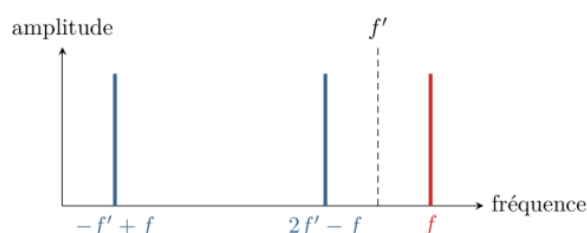
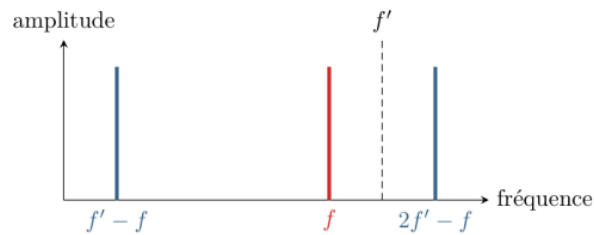


Figure 2 – Spectre pour $T' \gtrsim T$.

5. Si $T' \lesssim T$, alors le repère parcourt un peu moins qu'un tour complet entre deux flashes. Son mouvement apparent est donc le même que s'il se déplaçait plus lentement mais à l'envers. En termes de spectre, on a là encore apparition d'une réplique à basse fréquence, voir figure 3. En revanche, le sens de rotation du disque ne peut pas s'observer sur le spectre.

Figure 3 – Spectre pour $T' \lesssim T$.

6. Un film n'est pas tourné en continu mais ne contient que 24 images par seconde. Cela est suffisant pour donner l'illusion de la continuité compte tenu de la durée de la persistance rétinienne, de l'ordre de 0,1 s, mais cela peut aussi donner lieu à des effets stroboscopiques comme ceux discutés précédemment si la fréquence (apparente) de rotation des roues est proche de 24 Hz.

Filtrage numérique :

□ Exercice 2.4. Filtre passe-haut numérique ★★ (méthode d'Euler, filtrage numérique)

1. La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre, de constante de temps τ , s'écrit en régime harmonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}.$$

2. On a $(1 + j\omega\tau)\underline{s} = j\omega\tau\underline{e}$. En domaine temporel, l'équation différentielle est :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = \tau \frac{de}{dt}.$$

3. Discretisons par la méthode d'Euler explicite (avant) avec un pas T_e :

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{s(t_n + T_e) - s(t_n)}{T_e} = \frac{s_{t_{n+1}} - s_{t_n}}{T_e}, \quad \left. \frac{de}{dt} \right|_{t_n} \approx \frac{e(t_n + T_e) - e(t_n)}{T_e} = \frac{e_{t_{n+1}} - e_{t_n}}{T_e}.$$

On obtient :

$$\tau \frac{s_{t_{n+1}} - s_{t_n}}{T_e} + s_{t_n} = \tau \frac{e_{t_{n+1}} - e_{t_n}}{T_e}.$$

D'où l'équation récurrente :

$$s_{t_{n+1}} = \frac{\tau}{T_e + \tau} s_{t_n} + \frac{\tau}{T_e + \tau} (e_{t_{n+1}} - e_{t_n}).$$

4. Script Python complété :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from math import pi
4
5 # Paramètres
6 N = 1000
7 Te = 5.0 / N          # = 0.005 s
8 t = np.arange(N) * Te # vecteur temps
9
10 wc = 2*pi             # pulsation de coupure (rad/s) -> fc = 1 Hz
11 tau = 1.0 / wc
12 a = tau / (Te + tau)
13
14 # Signal d'entrée : somme de deux sinusoides (0.2 Hz et 5 Hz)
15 ei = np.cos(2*np.pi*0.2*t) + np.cos(2*np.pi*5*t)
16 # Initialisation de la sortie
17 si = np.zeros(N)
18
```

```

19
20 # Réponse du filtre (discrétisation Euler avant)
21 for i in range(N-1):
22     si[i+1] = a * si[i] + a * (ei[i+1] - ei[i])
23
24 # Affichage
25 plt.figure(figsize=(9,4))
26 plt.plot(t, ei, label='e(t)')
27 plt.plot(t, si, label='s(t)')
28 plt.xlabel('temps (s)')
29 plt.title("Réponse du filtre passe-haut au signal e_i(t)")
30 plt.legend()
31 plt.grid(True)
32 plt.show()

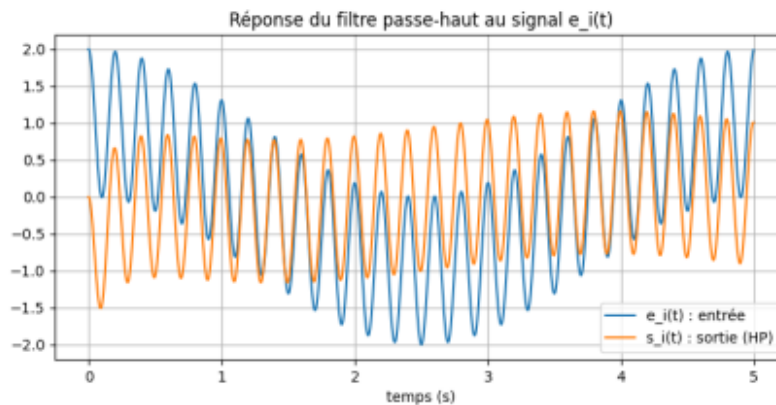
```

Pour une entrée $e_p(t) = \cos(2\pi \times 0.2 t) + \cos(2\pi \times 5 t)$, la sortie montre que la composante basse fréquence (0.2 Hz) est fortement atténuée alors que la composante 5 Hz est transmise.

En faisant varier la pulsation de coupure ω_c , on peut ajuster l'efficacité du filtrage :

- si ω_c est trop faible, la composante à 0.2 Hz passe en partie ;
- si ω_c est trop grande, on commence à atténuer aussi la composante utile à 5 Hz.

Un choix judicieux de ω_c (par exemple $\omega_c \approx 2\pi$ à 4π rad/s) permet un compromis satisfaisant.



5. Script Python complété :

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from math import pi
4
5  N = 1000
6  Te = 5.0 / N
7  t = np.arange(N) * Te
8
9  wc = 2*pi          # fréquence de coupure (rad/s)
10 tau = 1.0 / wc
11 a = tau / (Te + tau)
12
13 ei = np.array([0 if k == 0 else 1 for k in range(N)], dtype=float)
14 si = np.zeros(N)
15
16 for i in range(0, N-1):
17     si[i+1] = a * si[i] + a * (ei[i+1] - ei[i])
18
19 plt.figure()
20 plt.plot(t, ei, 'b', label='e(t)')
21 plt.plot(t, si, 'r', label='s(t)')
22 plt.xlabel('temps (s)')
23 plt.title("Réponse du filtre passe-haut à l'échelon de tension")
24 plt.legend()
25 plt.grid(True)
26 plt.show()

```