

Questions de cours : Filtrage et numérisation du signal

1) Déterminer la fonction de transfert du filtre **RC** série (tension aux bornes de **C**). Définir le gain, le gain en décibels, la bande-passante et donner leur expression dans le cas présent.

2) Soit un filtre **CLR** série (tension au bornes de **R**). Etablir l'expression de la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}, \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Identifier Q , H_0 et ω_0 .

3) Soit un filtre **RL** série (tension aux bornes de **L**). Etudier complètement ce filtre (fonction de transfert, comportement asymptotique, diagramme de Bode).

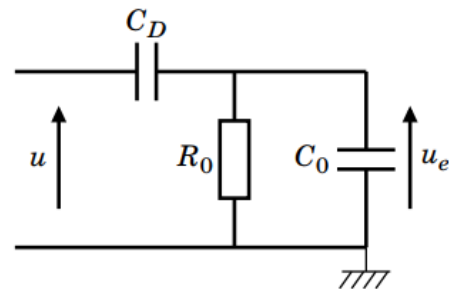
4) On souhaite échantillonner le signal suivant : $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + \frac{A}{2} \cos(10\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 1 \text{ kHz}$ à la fréquence d'échantillonnage : $f_e = 8 \text{ kHz}$.

Représenter le spectre du signal avant et après échantillonnage. Le critère de Nyquist-Shannon est-il respecté ?

Exercices : Filtrage et numérisation du signal

1) Couplage AC et DC d'une entrée d'oscilloscope

Lorsqu'on applique une tension $u(t)$ à l'entrée d'un oscilloscope, celle-ci est envoyée à l'entrée d'un amplificateur dont on peut considérer l'impédance d'entrée comme constituée d'une association parallèle d'un conducteur ohmique de résistance $R_0 = 1,0 \text{ M}\Omega$ et d'un condensateur de capacité $C_0 = 13 \text{ pF}$. Lorsqu'on se couple en mode DC, cette description est suffisante (envoi direct), mais dans le cas d'un couplage AC, on applique préalablement la tension à un condensateur de capacité C_D . Dans ce cas, l'entrée de l'oscilloscope se comporte comme le filtre ci-contre.



1 – Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_e}{u}$ correspondant au couplage AC. Simplifier $\underline{H}$ en considérant que $C_D \gg C_0$. Quelle est la nature du filtre ? Quel est l'intérêt du couplage AC ?

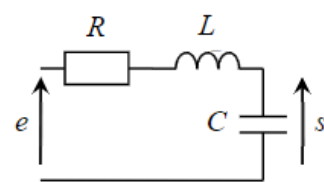
2 – Proposer un protocole expérimental pour mesurer C_D et vérifier l'hypothèse précédente.

2) Filtre RLC série

On étudie le circuit linéaire ci-contre.

Il est composé de trois dipôles en série : une résistance R , une inductance parfaite de coefficient d'induction L , et d'un condensateur de capacité C .

Il est soumis à une tension d'entrée sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$. On note $s(t)$ la tension de sortie.



1. À l'aide de deux schémas équivalents du circuit, l'un en hautes fréquences, l'autre en basses fréquences, donner la nature de ce filtre.

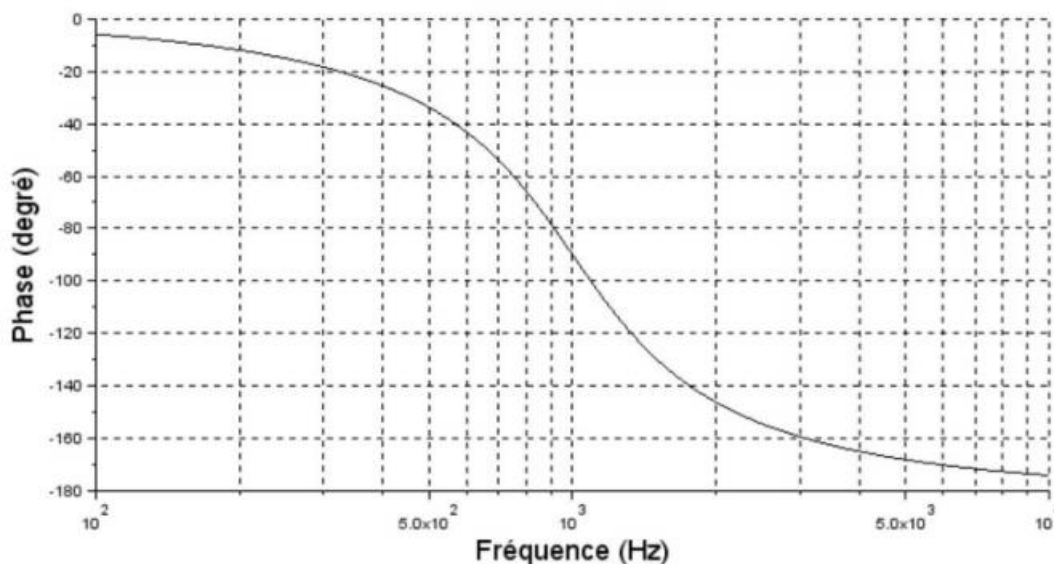
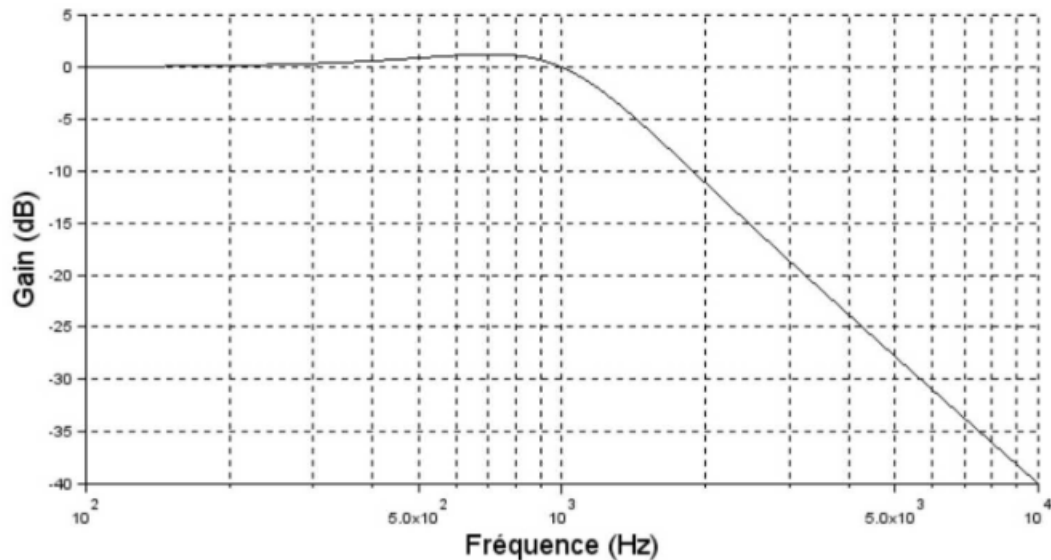
2. a) Établir la fonction de transfert de ce filtre sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \text{ en précisant } \omega_0 \text{ et } Q. \text{ Donner l'ordre de ce filtre.}$$

- b) Si $e(t)$ est une fonction quelconque du temps (non nécessairement sinusoïdale), quelle est l'équation différentielle entre les fonctions $s(t)$ et $e(t)$?

Pour quelle raison peut-on affirmer la convergence du régime transitoire ?

3. Exprimer le module de la fonction de transfert $|\underline{H}(\omega)|$, en fonction de ω , ω_0 et Q .
4. Montrer que $|\underline{H}(\omega)|$ passe par un maximum pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Comment appelle-t-on ce phénomène ? Déterminer ω_r , la pulsation correspondant à ce phénomène, en fonction de ω_0 et Q .
5. On appelle gain la fonction $G_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$. Le tracé du diagramme de Bode est réalisé avec $Q = 1$. Dédurre du diagramme la valeur de ω_0 . Justifiez l'allure des asymptotes de G_{dB} aux basses fréquences et aux hautes fréquences. Exprimer $G_{dB}(\omega_0)$.



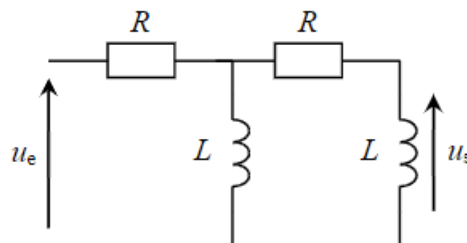
3) Filtre ADSL

Le chien de Madame Michu a mangé son filtre ADSL ! Qu'à cela ne tienne, elle va en fabriquer un elle-même...

Les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties : les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4 kHz ; les signaux informatiques (Internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

1. Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

Madame Michu réalise le filtre ci-contre.



2. Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique. En déduire pour quels signaux il peut être utilisé.

3. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } \omega_0 \text{ à déterminer en fonction de } R \text{ et } L.$$

4. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre, puis esquisser l'allure de la courbe réelle de gain en la justifiant.
5. Madame Michu possède des résistances de 100 Ω . Quelle valeur d'inductance doit-elle choisir pour réaliser le filtre souhaité ?

4) Cave à vin

Pour assurer la bonne conservation des vins, on souhaite éviter qu'ils ne subissent de fortes variations de température.

1 – Proposer un spectre simplifié de la température de surface en France ; on envisagera trois composantes avec leur fréquence et leur amplitude, et on donnera des estimations numériques des fréquences et amplitudes.

Enterrer un local permet de filtrer le signal de température : on admet que pour un local enterré d'une profondeur h , la fonction de transfert entre la température en surface et la température dans le local est

$$\underline{H} = \frac{T_{\text{int}}}{T_{\text{ext}}} = e^{-(1+i)\frac{h}{\sqrt{2}D}\omega} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c} \simeq 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{pour le sol}$$

2 – Calculer le gain en décibels et tracer le diagramme de Bode. Quelle est la nature du filtre ?

3 – Exprimer la fréquence de coupure d'un tel filtre en fonction de h , puis faire l'application numérique pour $h = 1 \text{ m}$. Conclure sur l'efficacité d'une cave à vins enterrée.

5) Le CD audio

Nous cherchons à enregistrer un concert sur un CD audio, en format non compressé (WAV par exemple) afin de ne pas perdre en qualité. Le son est capté par un microphone (signal analogique), puis filtré par un passe-bas, et enfin échantillonné avec une fréquence f_e . La fréquence d'échantillonnage d'un CD audio est de $f_e = 44100 \text{ Hz}$, et la quantification est faite sur 16 bits (chaque mesure est codée sur 16 bits).

1. Quelle est la gamme de fréquence audible ? Quelle doit-être alors la fréquence d'échantillonnage minimale pour enregistrer tout le spectre audible ? La fréquence $f_e = 44100 \text{ Hz}$ est-elle compatible ?
2. On choisit tout d'abord de ne pas mettre le filtre passe-bas en amont du CAN. Un son de fréquence $f_1 = 43000 \text{ Hz}$ est présent lors du concert.
 - a) Ce son est-il audible lors du concert ? Que deviendra-t-il après échantillonnage ? En quoi cela pose problème ?
 - b) Expliquer en quoi l'ajout du filtre passe-bas en amont de l'échantillonneur peut résoudre ce problème. Estimer sa fréquence de coupure.
 - c) Quel autre problème peut apporter à son tour ce filtre ? Pour atténuer ce problème, on augmente l'ordre du filtre, et on effectue un sur-échantillonnage (f_e un peu plus élevée que prévu par le critère de Shannon). Expliquer pourquoi.
3. On cherche maintenant à calculer la durée d'enregistrement que peut contenir un CD audio enregistrable du commerce, soit 700 Mo.
 - a) Sachant que l'enregistrement s'effectue à $f_e = 44100 \text{ Hz}$ sur 16 bits d'échantillonnage, et que l'on enregistre en stéréo, donc 2 sons (2 signaux), de combien de bits a-t-on besoin pour enregistrer 1 seconde de concert ?