

1) Couplage AC et DC d'une entrée d'oscilloscope

1 – On écrit un pont diviseur entre C_D et l'association parallèle de C_0 et R_0 :

$$\underline{H} = \frac{\frac{R_0/jC_0\omega}{R_0+1/jC_0\omega}}{\frac{R_0/jC_0\omega}{R_0+1/jC_0\omega} + 1/jC_D\omega} = \frac{\frac{R_0}{1+jR_0C_0\omega}}{\frac{R_0}{1+jR_0C_0\omega} + 1/jC_D\omega} = \frac{jR_0C_D\omega}{jR_0C_D\omega + (1 + jR_0C_0\omega)}$$

$$\underline{H} = \frac{jR_0C_D\omega}{1+jR_0(C_0+C_D)\omega}$$

Il s'agit d'un passe-haut. On remarque (en passant) que la limite à haute fréquence est $\frac{C_D}{C_D+C_0}$, ce qui est bien la formule du pont diviseur, sachant qu'à haute fréquence la branche contenant C_0 est associée à un fil, donc celle contenant R_0 n'est pas parcourue. Dans l'approximation proposée, on obtient

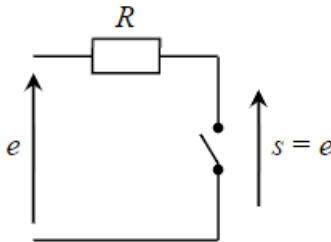
$$\underline{H} \simeq \frac{jR_0C_D\omega}{1+jR_0C_D\omega}$$

Le filtre a donc pour but d'enlever les fréquences basses. La fréquence de coupure est donc $\frac{2\pi}{R_0C_D}$; si celle-ci est de l'ordre de 1 Hz, le filtre ne coupera que la fréquence nulle, donc le continu : il s'agit bien d'**enlever la moyenne du signal**.

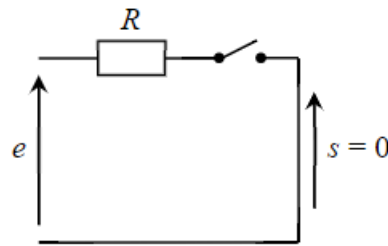
2 – On peut simplement mettre en entrée 1 de l'oscilloscope un signal sinusoïdal (de pulsation variable) observé en DC, et sur la voie 2 le même signal en AC. On pourra ainsi tracer le diagramme de Bode de l'entrée AC.

2) Filtre RLC série

1. À basse fréquence, l'inductance se comporte comme un fil, et le condensateur comme un interrupteur ouvert :



À haute fréquence, l'inductance se comporte comme un interrupteur ouvert, et le condensateur comme un fil :



Ce quadripôle est un filtre passe-bas.

⇒ Méthode 7.1

2. a) Pour établir la fonction de transfert, il suffit d'appliquer la règle du diviseur de tension :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{RjC\omega - LC\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \text{ C'est un filtre d'ordre 2.}$$

b) On a les équivalences suivantes entre la notation complexe et la notation réelle :

$$j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt} \text{ et } \frac{1}{j\omega} \leftrightarrow \int dt. \text{ On a } \underline{H}(\omega) = \frac{s}{\underline{e}}, \text{ soit } \underline{s} \times \left(1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) = \underline{e}. \text{ Cette expression}$$

$$\text{devient en temporel : } \boxed{\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)}.$$

Le régime transitoire correspond à la solution de l'équation sans second membre. Ici tous les coefficients de l'équation différentielle sont positifs, les racines de l'équation caractéristique ont une partie réelle négative : les solutions sont des exponentielles convergentes quand $t \rightarrow \infty$.

$$3. \boxed{|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}.$$

4. $|\underline{H}(\omega)|$ est maximal quand $\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}$ est minimal, donc quand $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}$ est minimal (car la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est croissante). Alors sa dérivée est nulle :

$$2 \times \left(-2 \frac{\omega}{\omega_0^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2 \frac{\omega}{Q^2\omega_0^2} = 0 \text{ et comme } \omega \neq 0, \text{ on obtient } \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{1}{2Q^2} \text{ soit finalement}$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2}. \text{ La solution existe si } 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0, \text{ soit } \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}: \text{ alors le maximum de } |\underline{H}(j\omega)|$$

se produit pour $\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$. Ce phénomène s'appelle la résonance.

La solution n'existe pas si $1 - \frac{1}{2Q^2} < 0$, soit $\boxed{Q < \frac{1}{\sqrt{2}}}$: alors $|\underline{H}(j\omega)|$ n'a pas de maximum.

5. Pour $\omega \ll \omega_0$, $\underline{H} \approx 1$ donc $G_{dB} = 0$, $\varphi = 0$.

Pour $\omega = \omega_0$, $\underline{H} = -jQ$ donc $G_{dB} = 20 \log(Q)$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Pour $\omega \gg \omega_0$, $\underline{H} \approx -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ donc $G_{dB} = 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$, $\varphi = -\pi$.

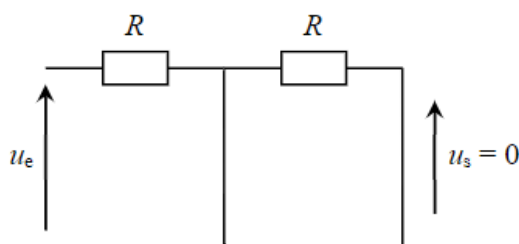
On lit donc graphiquement la valeur de $\boxed{f_0 = 1 \text{ kHz}}$ lorsque $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

3) Filtre ADSL

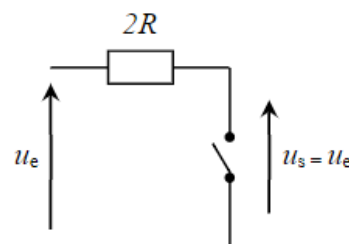
1. On isole les signaux téléphoniques (basses fréquences) avec un filtre passe-bas, et les signaux informatiques avec un filtre passe-haut.

La fréquence de coupure doit être nettement plus grande que les fréquences téléphoniques et nettement plus faible que les fréquences informatiques : le meilleur choix est $\boxed{f_0 = 10 \text{ kHz}}$.

2. En basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$), les bobines se comportent comme des fils, d'où :



En haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), les bobines se comportent comme des coupe-circuits, d'où :



Le signal de sortie est de l'ordre de grandeur du signal d'entrée pour les hautes fréquences, et négligeable pour les basses fréquences : c'est un filtre passe-haut. Il permettra d'obtenir les signaux informatiques.

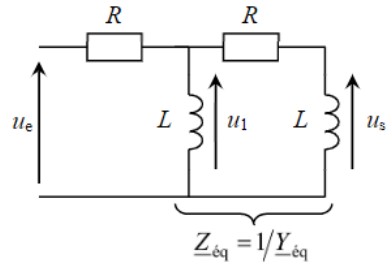
3. On considère deux ponts diviseurs successifs.

Soit $\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$ l'admittance de l'ensemble

L en parallèle avec RL (ayant la tension u_1 à ses bornes).

Un premier pont diviseur donne :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}} \underline{U}_e.$$



☛ La résistance et l'inductance de gauche ne sont pas en série, et ne constituent pas à elles seules un diviseur de tension. En revanche la résistance et l'inductance de droite, elles, sont bien en série.

Un second diviseur de tension donne : $\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{U}_1$, soit $\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \cdot \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}} \underline{U}_e$.

On obtient en développant : $\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + R\left(\frac{R + jL\omega}{jL\omega} + 1\right)} \underline{U}_e = \frac{-(L\omega)^2}{R^2 + j3RL\omega - (L\omega)^2} \underline{U}_e$.

On divise par R^2 pour avoir une partie réelle unitaire et des puissances croissantes de ω au

dénominateur : $\underline{H} = \frac{-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}{1 + j3\frac{L}{R}\omega - \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}$. En posant $\omega_0 = \frac{R}{L}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$: $\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2}$.

4. Pour $x \gg 1$, la fonction de transfert devient $\underline{H}(x) \approx 1$ donc $G_{\text{dB}} = 0$ et $\varphi = 0$ (réel positif).

Pour $x = 1$, $\underline{H}(1) = \frac{-1}{1 + 3j - 1} = \frac{j}{3}$, donc $G_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{1}{3}\right) = -9,5 \text{ dB}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (imaginaire pur positif).

Pour $x \ll 1$, $\underline{H} \approx -x^2$, donc $G_{\text{dB}} = 40 \log x$ (pente de +40 dB/décade) et $\varphi = \arg(-x^2) = \pi$: on choisit π car le saut de phase ne peut être que de $\frac{\pi}{2}$ avec la valeur pour $x = 1$.

☛ Pour un nombre réel négatif comme $-x^2$, on pourrait choisir aussi un argument de $-\pi$ au lieu de $+\pi$, les deux sont équivalents. Mais ici ce sont les autres valeurs qui nous imposent ce choix.

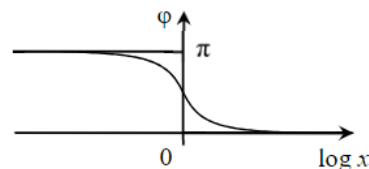
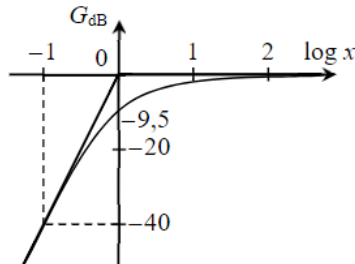
Autre rédaction : pour tout x , $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}} = 40 \log x - 10 \log[(1-x^2)^2 + 9x^2]$ et

$\varphi = \arg \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2} = \arg \frac{jx}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right)$, d'où on peut déduire les limites et

valeurs précédentes (avec $\arctan(0) = 0$, $\arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$ et $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$).

On note que les asymptotes de gain se coupent pour $\log x = 0$.

On complète le diagramme avec les valeurs calculées précédemment en $x = 1$.



Le diagramme de Bode réel n'a pas de pic de résonance car le facteur de qualité du filtre vaut

$Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (voir exercice 9.9) ; de plus en $x = 1$ la courbe est nettement en dessous de la valeur maximale, il est donc impossible d'avoir un pic dans ces conditions.

5. La fréquence de coupure est $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$ donc $L = \frac{R}{2\pi f_0}$. AN $L = 1,6 \text{ mH}$ (ordre de grandeur des inductances effectivement utilisées dans les filtres ADSL).

4) Cave à vin

1 – La température est la somme d'une moyenne, d'une variation annuelle de fréquence $\nu_a = 3,2 \cdot 10^{-8}$ Hz et d'une variation journalière $\nu_j = 1,2 \cdot 10^{-5}$ Hz :

$$T_{rmext}(t) = T_{moy} + T_a \cos(\omega_a t) + T_j \cos(\omega_j t + \varphi)$$

En utilisant le site de Météo France pour la station de Marignane, on obtient environ $T_{moy} = 15^\circ\text{C} = 298\text{ K}$, $T_a = 18\text{ K}$ et $T_j = 10\text{ K}$.

2 – On calcule le gain en décibels

$$G_{dB} = 20 \log e^{-\frac{h}{\sqrt{2}D}\omega} = -\frac{20}{\ln 10} \frac{h}{\sqrt{2}D} \omega$$

On voit que le gain est une fonction linéaire de la fréquence, ce qui est inhabituel. Il s'agit d'un passe-bas.

3 – Le gain maximal est 1 pour la composante statique. On utilise la définition de la fréquence de coupure :

$$e^{-\frac{h}{\sqrt{2}D}\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\nu_c = \frac{\ln 2}{2\sqrt{2}\pi} \frac{D}{h}} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Hz}$$

On constate que $\nu_j \gg \nu_c$, donc les fluctuations de températures journalières sont parfaitement coupées ; de même, $\nu_a \approx \nu_c$ donc les fluctuations saisonnières seront également atténuées et finalement $T_{int} \approx T_{moy}$: la cave à vins joue bien son rôle pour avoir une température stable.

5) Le CD audio

1. Les fréquences audibles vont de 20 Hz à 20 kHz. Le critère de Nyquist-Shannon impose au moins 2 points de mesure par période, soit une fréquence d'échantillonnage au moins double de la plus haute fréquence que l'on souhaite restituer. Ici donc : $f_{\text{échant}} \geq 2 \cdot 20 \text{ kHz} = 40 \text{ kHz}$. La fréquence d'échantillonnage de 44,1 kHz est compatible avec le critère de Nyquist-Shannon.

⇒ Méthode 21.1

2. a) Un son de $f_1 = 43 \text{ kHz}$ n'est pas audible lors du concert. Par contre, il est susceptible d'être capté par le microphone. Or l'échantillonnage à f_e est à l'origine d'un repliement du spectre, et fait donc apparaître la fréquence $f' = |f_e - f_1| = 1100 \text{ Hz}$, qui se trouve dans le spectre audible ! Cette fréquence f' qui n'était pas présente lors du concert sera enregistrée et envoyée au haut-parleur lors de l'écoute du CD !

b) Un filtre passe-bas anti repliement de fréquence de coupure $f_c = f_e / 2 = 22,5 \text{ kHz}$ est intercalé entre la sortie du microphone et le CAN. Il a pour rôle de supprimer toutes les fréquences susceptibles de se replier à plus basse fréquence (donc gênantes).

⇒ Méthode 21.2

c) Le problème qui se présente maintenant est que l'on ne sait pas construire un passe-bas qui laisse passer toutes les fréquences inférieures à f_c et coupe entièrement les fréquences supérieures à f_c . Le risque est de commencer à filtrer les hautes fréquences audibles... et à l'inverse, de garder un peu de fréquences supérieures à 20 kHz susceptibles de se replier !

C'est la raison pour laquelle la fréquence d'échantillonnage est en fait supérieure à 40 kHz : cela laisse une marge pour la transition.

→ les fréquences inférieures à $f_{\text{max}} = 20 \text{ kHz}$ doivent passer à travers le filtre ;

→ les fréquences supérieures susceptibles de se replier en dessous de 20 kHz doivent être coupées : ce sont les fréquences supérieures à $f_e - f_{\text{max}} = 24,1 \text{ kHz}$.

Entre 20 et 24,1 kHz, cela n'a pas d'importance : elles ne sont pas audibles, et le repliement n'est pas audible non plus. C'est la zone de transition du filtre passe-bas.

Enfin, plus l'ordre du filtre est grand, plus il coupe rapidement les fréquences supérieures à 20 kHz.

3. a) La fréquence d'échantillonnage donne le nombre de mesures effectuées chaque seconde. Or chaque mesure contient 16 bits. Les 2 signaux du son stéréo occupent donc $N = 44\,100 \cdot 16 \cdot 2 = 1,41 \cdot 10^6$ bytes, soit $N = 1,41 \text{ Mb}$ par seconde d'enregistrement.

b) La durée d'enregistrement possible sur un CD enregistrable du commerce de 700 Mo (soit 700·8 Mb) est : $t = (700 \cdot 8) / 1,41 = 3970 \text{ s}$ soit 66 minutes . $\Rightarrow$ Méthode 21.1

✍ La durée d'enregistrement est un peu moins longue en réalité car on ajoute des bits de correction d'erreur qui permettent de corriger un peu le signal en cas de rayures... dans la limite du raisonnable !

c) Pour un format MP3, la durée d'enregistrement est multipliée par 4 à 20 : sur 700 Mo, il est alors possible d'enregistrer 4 à 20 heures de concert !