Applications de cours

1) *Déterminer l'expression du potentiel électrostatique pour une charge ponctuelle en le prenant nul à l'infini.*

2) *Déterminer le champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée en volume.*

3) *Déterminer le champ électrostatique créé par un cylindre infini uniformément chargé en volume.*

4) *Déterminer le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.*

5) *Rappeler en quoi consiste l'approximation dipôlaire puis déterminer l'expression du potentiel créé par un dipôle électrostatique dans ce cadre.*

Potentiel électrostatique

Exercice 4.1. Potentiel créé par une sphère uniformément chargée ★

Une sphère de rayon R contenant une charge q répartie uniformément dans son volume créé le champ

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

Calculer le potentiel associé, en le prenant nul à l'infini. Reprendre le calcul en le choisissant nul en $r = 0$. Comparer les deux résultats.

Exercice 4.2. Potentiel de Yukawa ★★

Considérons une distribution de charge pour laquelle, à une distance r d'un point origine O, le potentiel électrostatique a pour expression

$$V(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{e}^{-r/a}$$

où a et Z sont deux constantes positives et e la charge élémentaire.

1 - Calculer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

2 - En déduire la charge contenue à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon r.

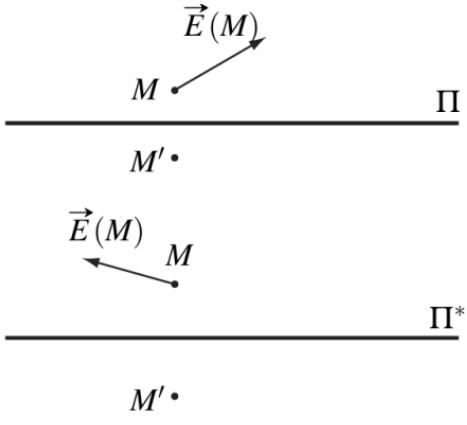
3 - Étudier les limites $r \gg a$ et $r \ll a$. Que modélise ce potentiel ? Que représentent Z et a ?

Donnée : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$.

Symétrie, Invariance et Théorème de Gauss :

Exercice 4.3. Symétries du champ électrostatique 1 ★

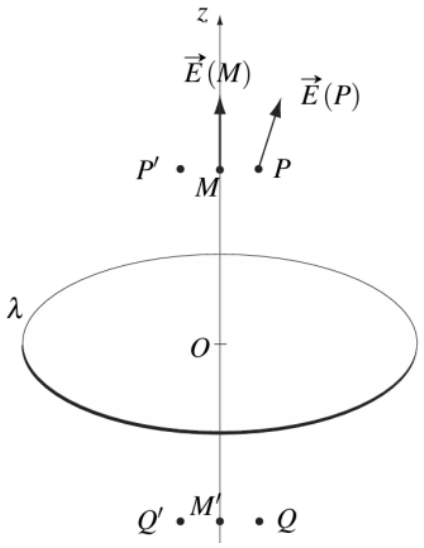
1. Le plan Π est un plan de symétrie d'une distribution de charges $\rho(P)$. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π. Compléter le schéma en dessinant le champ électrique au point M'.
2. Le plan Π* est un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges $\rho(P)$. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π*. Compléter le schéma en dessinant le champ électrique au point M'.



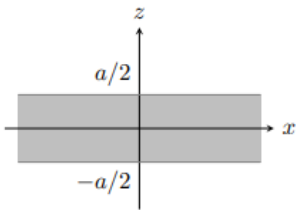
Exercice 4.4. Symétries du champ électrostatique 2 ★

On considère un cerceau d'axe (Oz) chargé uniformément (densité linéique de charge λ). On donne le champ électrique en M et en P.

1. Représenter le champ électrique en M' symétrique de M par rapport au cerceau, en P' symétrique de P par rapport à l'axe, en Q symétrique de P par rapport au cerceau et en Q' symétrique de Q par rapport à l'axe.
2. Sans calcul, déterminer le champ électrostatique au centre O de l'anneau.



Exercice 4.5. Champ électrostatique créé par une couche épaisse ★★



On considère une couche épaisse, comprise entre les deux plans d'équation $z = -a/2$ et $z = +a/2$ et infinie dans les directions x et y, chargée uniformément en volume avec une densité volumique de charge ρ_0.

1 - Montrer que le champ électrique prend en tout point M de l'espace la forme

$$\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e}_z\,.$$

2 - Calculer le champ créé par la distribution dans tout l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

3 - Que vaut le champ dans le plan (xOy) ? Interpréter par des arguments de symétrie.

4 - Tracer le graphe représentant $E_z(z)$ pour $\rho_0 > 0$. Commenter le comportement de $\vec{E}$ en $z = \pm a/2$ où la densité de charge est discontinue.

Considérons maintenant que la couche est d'épaisseur très fine : $a \to 0$. On cherche à la décrire par une distribution surfacique de charge σ_0 uniforme à partir des résultats précédentes.

5 - Exprimer la densité surfacique de charge σ_0 en fonction de ρ_0 et a. Que devient le champ électrique dans chaque demi-espace ?

6 - Commenter le comportement de $\vec{E}$ au passage du plan chargé.

Exercice 4.6. Noyau atomique ★★

La répartition de charge au sein de certains noyaux atomiques peut être modélisée par une densité volumique de la forme

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right) & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est le rayon du noyau et r est la distance au centre O.

1 - Exprimer ρ_0 en fonction du numéro atomique Z du noyau.

2 - Calculer le champ électrostatique créé par le noyau en tout point de l'espace.

3 - Représenter graphiquement sa norme en fonction de r.

4 - Si on avait souhaité calculer seulement le champ ressenti par un électron de l'atome, quelle démarche beaucoup plus simple aurait-on pu adopter ? Expliquer pourquoi elle s'applique.

Exercice 4.7. Champ gravitationnel de la Terre ★

La Terre est assimilée à une sphère de rayon $R = 6{,}37 \times 10^3\,\text{km}$ et de masse $m = 5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg}$ répartie uniformément. On donne $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{m}^3{\cdot}\text{kg}^{-1}{\cdot}\text{s}^{-2}$.

1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ gravitationnel à l'extérieur de la Terre.

2. Vérifier que l'on obtient le même résultat en considérant que toute la masse terrestre est concentrée en son centre.

3. Faire l'application numérique pour le champ de gravitation à la surface de la Terre et comparer à l'accélération de la pesanteur.

Condensateur plan :

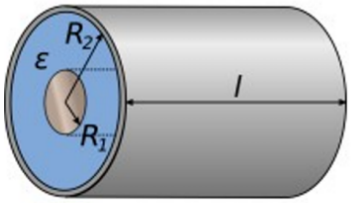
Exercice 4.8. Modélisation d'un nuage mince ★

On considère, dans le vide et loin de toute charge, un nuage électrique Π suffisamment étendu pour le considérer d'épaisseur négligeable, d'équation $z = h$ et chargé avec la densité surfacique constante négative σ.

1. Déterminer le champ électrique créé par le nuage en tout point M de l'espace.
2. On considère maintenant que le plan xOy représentant le sol porte une densité de charge opposée à celle du nuage. Déterminer le champ total créé par le sol et le nuage pour $0 < z < h$.
3. Déterminer le potentiel total créé par le sol et le nuage pour $0 < z < h$ sachant que $V(0) = 0$.
4. Ce condensateur modélise un nuage carré de 10 km de côté à une hauteur $h = 2\,\text{km}$. Déterminer la capacité du condensateur ainsi formé et effectuer l'application numérique.
5. On considère maintenant un nuage d'orage. Sachant que lorsque l'éclair se forme, le champ électrique a pour valeur $25\,\text{kV}\cdot\text{m}^{-1}$, déterminer le potentiel V_0 du nuage.

Exercice 4.9. Capacité d'un câble coaxial ★★

On modélise un câble coaxial par deux cylindres conducteurs parfaits infiniment longs, de même axe et de sections circulaires. Le premier, de rayon R_1 est appelé âme et est porté au potentiel $V_1 > 0$. Le second, de rayon $R_2 > R_1$ est appelé gaine et est porté au potentiel $V_2 < V_1$. Ces deux surfaces sont respectivement chargées avec des densités surfaciques de charges notées σ_1 et σ_2. L'espace entre les deux conducteurs est vide de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0$. On néglige les effets de bords ($l \gg R_2$) et on se place en régime statique, ce qui signifie que les charges des deux armatures sont opposées. On note $e = R_2 - R_1$.



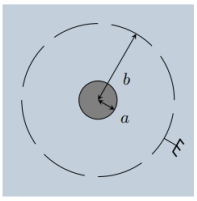
1. Déterminer la relation entre σ_1 et σ_2.
2. En raisonnant sur le câble infini, étudier les symétries et invariances. Quelles sont les conséquences pour le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point M de l'espace entre les deux armatures ?
3. En appliquant le théorème de Gauss, exprimer ce champ entre les deux armatures.
4. En déduire la différence de potentiel U entre l'âme et la gaine.

On généralise la définition de la capacité d'un condensateur par analogie avec le condensateur plan, en posant : $C = QU$, Q étant la charge portée par son armature positive et U la différence de potentiel entre les deux armatures.

5. Déterminer la capacité linéique C_l de ce condensateur cylindrique en fonction de ε_0, R_1 et R_2. Faire l'application numérique pour $R_1 = 1\,\text{mm}$ et $R_2 = 2{,}5\,\text{mm}$.

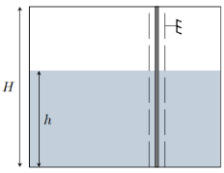
Exercice 4.10. Capteur capacitif de niveau de liquide ★★★

Le niveau de liquide contenu dans une cuve peut être mesuré en temps réel à l'aide de capteurs capacitifs, dont plusieurs sont présentés dans la vidéo ci-contre (flasher ou cliquer sur le QR code). Cet exercice propose d'étudier l'un de ces capteurs, appelé sonde à tube de masse, utilisable pour mesurer le niveau d'un liquide non conducteur (solvant organique, huile, etc.). Il se présente comme une longue tige cylindrique de même hauteur que la cuve et de rayon beaucoup plus faible, voir figure 2. Le capteur est constitué de deux cylindres métalliques coaxiaux formant un condensateur dont la capacité dépend directement du niveau de liquide dans la cuve. Le cylindre intérieur est un cylindre plein, alors que le cylindre extérieur est creux et percé d'orifices permettant au fluide de pénétrer dans l'espace entre les deux cylindres. Le cylindre extérieur est électriquement relié à la terre.



Hypothèses pour l'ensemble de l'exercice :

- ▷ les orifices ne modifient pas les propriétés électromagnétiques du cylindre extérieur, qui sont identiques à celles d'un cylindre creux non percé ;
- ▷ les effets de bords aux limites de la cuve et à l'interface entre le liquide et l'air sont négligeables ;
- ▷ les propriétés électromagnétiques du fluide sont analogues à celles du vide à condition de remplacer la permittivité du vide ε_0 par celle du liquide $\varepsilon_0\varepsilon_r$, où ε_r (sans dimension) est la constante diélectrique du liquide.



Donnée : en coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,.$$

1 - Justifier que le potentiel V dans l'espace contenu entre les deux cylindres ne dépend que de la distance r à l'axe des cylindres.

2 - En déduire l'expression du potentiel dans l'espace entre les deux cylindres en fonction du potentiel V_0 auquel est porté le cylindre central.

3 - Déterminer le champ électrique régnant entre les deux cylindres.

4 - Exprimer l'énergie électrostatique stockée entre les deux cylindres en fonction notamment de h et H.

5 - Montrer que la mesure de la capacité C du condensateur formé par les deux cylindres permet de déterminer le niveau h de liquide contenu dans la cuve.

6 - La sonde peut-elle convenir à n'importe quel liquide isolant ? Qu'en est-il si le liquide est conducteur (solution aqueuse par exemple) ?

Dipôle electrostatique :

☐ Exercice 4.11. Dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur non uniforme ★★

On place un dipôle électrostatique rigide $\vec{p}$ en un point M, à proximité d'une charge ponctuelle $q > 0$ située en O. L'origine du repère d'espace est en O de sorte que

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$

en coordonnées sphériques.

1. Montrer que le dipôle s'oriente radialement par rapport à la charge q.

2. Un dipôle rigide soumis à un champ électrostatique non uniforme subit la force

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right).$$

Déterminer l'expression de la force subie par le dipôle, en supposant qu'il s'est préalablement orienté selon la direction de la question précédente.

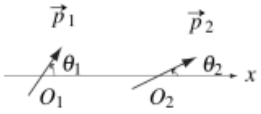
Le champ au point O, créé par le dipôle situé en M, est de la forme

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\overrightarrow{MO})\overrightarrow{MO} - OM^2\vec{p}}{OM^5}.$$

3. En déduire l'expression de la force subie par la charge q. Conclusion ?

☐ Exercice 4.12. Interaction entre deux dipôles électrostatiques ★★

On considère deux dipôles électrostatiques de moment dipolaire $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$, libres de tourner autour des points O_1 et O_2 :



On admet que l'énergie mutuelle d'interaction des dipôles $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ est

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2}\left(\vec{p}_1\cdot\vec{E}_2(O_1) + \vec{p}_2\cdot\vec{E}_1(O_2)\right),$$

$\vec{E}_2(O_1)$ étant le champ électrostatique créé par $\vec{p}_2$ en O_1, et $\vec{E}_1(O_2)$ le champ électrostatique créé par $\vec{p}_1$ en O_2.
On rappelle que le champ électrostatique créé en un point M par un dipôle en O est de la forme

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 OM^5}\left(3(\vec{p}\cdot\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM} - OM^2\vec{p}\right).$$

On suppose que $\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = p$.

1. Établir l'expression de $\mathcal{E}_p$ en fonction de p, $d = O_1O_2$, θ_1, et θ_2.

2. Parmi les configurations représentées ci-dessous, indiquer en justifiant votre réponse, celle(s) qui correspond(ent) à une position d'équilibre stable :

