EM1 - Électrostatique

Table des matières

Introduction **1**

I. Champ électrostatique **2**
1. Rappels sur la charge électrique . . . 2
2. Loi de Coulomb : Force électrostatique entre deux charges ponctuelles fixes . . . 2
3. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle . . . 2
4. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles . . . 2
5. Ordre de grandeur de champs électrique . . . 2

II. Distributions de charge **3**
1. Distribution volumique de charge . . . 3
2. Distributions surfaciques et linéiques . . . 4

III. Potentiel électrostatique **5**
1. Outils mathématiques . . . 5
2. Potentiel électrostatique pour une charge ponctuelle . . . 6
3. Du potentiel électrostatique au champ électrostatique . . . 7
4. Potentiel électrostatique et énergie électrostatique . . . 7

IV. Cartes de champ et de potentiel **8**
1. Définitions . . . 8
2. Position relative des équipotentielles et des lignes de champ . . . 8

V. Théorème de Gauss **10**
1. Principe de Curie . . . 10
2. Plan de symétrie de la distribution de charge et conséquence sur le champ électrostatique . . . 10
3. Plan d'antisymétrie de la distribution de charge et conséquence sur le champ électrostatique . . . 11
4. Invariances de la distribution de charge . . . 12
5. Application du théorème de Gauss . . . 13
6. Le condensateur plan . . . 18
7. Analogie électrostatique – gravitation . . . 19

VI. Le dipôle électrostatique **20**
1. Définitions . . . 20
2. Potentiel électrostatique créé par un dipôle . . . 20
3. Calcul du champ électrique créé par un dipôle électrostatique . . . 21
4. Action d'un champ extérieur sur un dipôle . . . 22
5. Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique extérieur . . . 22

Introduction

Quel est le lien entre un ballon de baudruche qui colle au mur, le fait que l'huile ne se mélange pas à l'eau, et la formation des éclairs ?
Dans tous les cas, ce sont des interactions entre charges électriques qui gouvernent ces phénomènes : c'est le domaine de l'électrostatique.

I. Champ électrostatique

1. Rappels sur la charge électrique

Dès l'Antiquité, les Grecs avaient observé que l'ambre frotté avec un tissu pouvait attirer de petits objets légers. La découverte de cette capacité de certains corps à s'électriser a conduit à la notion de **charge électrique**, notée q et exprimée en **coulomb (C)**. La charge électrique peut exister sous deux formes, l'une positive, l'autre négative.

Les expériences de Millikan, réalisées au début du XX^{e} siècle à l'aide de gouttelettes d'huile chargées, ont montré que **toute charge électrique est un multiple entier (relatif) de la charge élémentaire** $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$C.

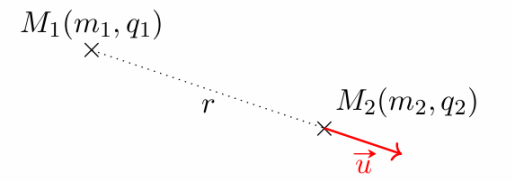
Par convention, la charge d'un électron a été choisie négative et égale à $q_{electron} = -e$.

2. Loi de Coulomb : Force électrostatique entre deux charges ponctuelles fixes ⋆

La **loi de Coulomb** donne l'expression de la force électrostatique qu'une particule 1 de charge q_1 exerce sur une autre particule 2 de charge q_2 dans le vide. Elle vaut :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{E}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}}$$

- q_1 et q_2 : charges électriques des deux particules, exprimées en coulombs (C) ;
- r : distance entre les deux particules, exprimée en mètres (m) ;
- $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$: permittivité électrique du vide ;
- $\overrightarrow{u}$: vecteur unitaire placé sur la particule 2, dirigé selon l'axe reliant les deux particules et orienté à l'opposé de la première particule.



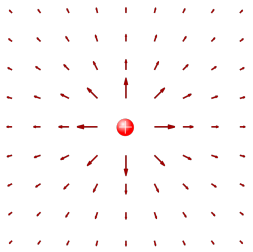
Ainsi, deux particules de charges de même signe se repoussent tandis que deux charges de signes opposés s'attirent.

3. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle ⋆

Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle peut s'obtenir à partir de l'expression de la force de Lorentz électrique : $\overrightarrow{F}_{\text{E}} = q_2\overrightarrow{E}$ avec :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}}$$

Le champ électrostatique créé par la charge q_1 au point où se trouve la charge q_2, et tel que $\|\overrightarrow{E}\|$ s'exprime en $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.



4. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles ⋆

Les forces étant additives, une charge q soumise aux actions d'un ensemble de charges fixes subit une force

$$\overrightarrow{F} = \sum_i \overrightarrow{F}_i = \sum_i q\overrightarrow{E}_i = q\sum_i \overrightarrow{E}_i \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{E} = \sum_i \overrightarrow{E}_i}$$

Les champs crées par les différentes sources sont additifs comme les forces. On parle de principe de superposition.

5. Ordre de grandeur de champs électrique

Système	Champ électrique créé (V/m)
Surface de la Terre	$\sim 10^2$
Orage	$\sim 10^5 - 10^6$
Norme d'une station de téléphonie mobile	~ 50
Noyau atomique	$\sim 10^{11}$

II. Distributions de charge

Application n°1 : De la charge ponctuelle à la distribution de charge.

Énoncé : On charge un condensateur de capacité $C = 16\,\text{nF}$ avec une tension $U = 1\,\text{V}$.

1. Exprimer la charge Q portée par les armatures.

2. En déduire le nombre d'électrons du circuit ayant été déplacés pendant la charge.

3. Conclure sur la pertinence de décrire le champ électrostatique entre les armatures du condensateur avec des charges ponctuelles.

Correction :

1. $\boxed{Q = CU = 1{,}6 \times 10^{-8}\,\text{C}\,.}$

2. $\boxed{N_e = \dfrac{Q}{e} = 1{,}6 \cdot 10^{11} \quad \text{électrons}\,.}$

3. La description microscopique des charges n'est pas adaptée dans ce cas. Une description à une échelle supérieure (mésoscopique) est plus utile.

1. Distribution volumique de charge

On considère un matériau chargé, constitué d'un très grand nombre de particules microscopiques chargées. On se place à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique (d $\sim$ 0,1 nm) et l'échelle macroscopique (d $\sim$ 1 cm $-$ 1 m) : l'**échelle mésoscopique** (d $\sim 1\,\mu$m).

— La charge δQ contenue dans un volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau$, centré sur un point M, est décrite par la **densité volumique de charge** ou charge volumique $\boldsymbol{\rho}$:

$$\boxed{\delta Q = \rho(M)\,\mathrm{d}\tau}$$

ρ s'exprime en $\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$.

— La **charge totale** contenue dans un volume $\mathcal{V}$ est $\boxed{Q = \iiint_{M\in\mathcal{V}} \rho(M)\,\mathrm{d}\tau}$.

— La densité volumique de charge est reliée à la **densité volumique de porteurs de charge** $n(M)$, avec n qui s'exprime en m^{-3}.

- si un seul type de porteurs (p.ex. faisceau d'ions tous identiques de charge q) : $\rho(M) = n(M)\,q$;
- si plusieurs types de porteurs de charge : par sommation, $\rho(M) = \sum_i n_i(M)\,q_i$.

Application n°2 : Déterminer la charge totale d'une distribution continue dans des situations simples

Énoncé : Déterminer la charge totale Q contenue dans une sphère de rayon R ayant une densité volumique de charge uniforme ρ_0.

Correction : Par définition de la charge totale :

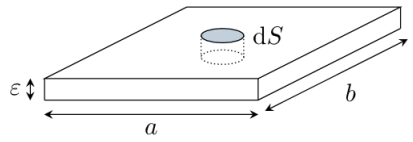
$$\boxed{Q = \iiint_{M\in\mathcal{V}} \rho(M)\,\mathrm{d}\tau = \iiint_{M\in\mathcal{V}} \rho_0\,\mathrm{d}\tau = \rho_0 \iiint_{M\in\mathcal{V}} \mathrm{d}\tau = \rho_0 \frac{4\pi R^3}{3}}$$

2. Distributions surfaciques et linéiques

Toutes les distributions de charge sont fondamentalement volumiques, c'est-à-dire que les charges sont réparties en trois dimensions. Il existe néanmoins des géométries particulières dans lesquelles une ou deux dimensions sont négligeables devant les autres.

. Distribution surfacique

Un exemple pour comprendre : cas d'une plaque de côtés a et b et de hauteur $\varepsilon \ll a, b$, chargée en volume avec une densité uniforme ρ.



La charge électrique portée par un volume de plaque de surface infinitésimale dS est

$$\delta Q = \rho \times \varepsilon \mathrm{d}S = \sigma \mathrm{d}S\,.$$

— La charge δQ contenue sur une surface mésoscopique dS, centrée sur un point M, est décrite par la **densité surfacique de charge** ou charge surfacique $\boldsymbol{\sigma}$:

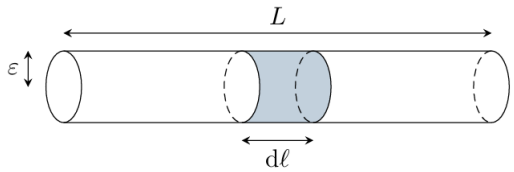
$$\boxed{\delta Q = \sigma(M)\,\mathrm{d}S}$$

σ s'exprime en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

— La charge totale portée par la surface $\mathcal{S}$ est $\boxed{Q = \iint_{M\in\mathcal{S}} \sigma(M)\,\mathrm{d}S\,.}$

. Distribution linéique

Un exemple pour comprendre : Cas d'un fil de longueur L et de rayon $\varepsilon \ll L$, chargé en volume avec une densité uniforme ρ.



La charge électrique portée par un élément de longueur dℓ du fil est $\delta Q = \rho \times \pi\varepsilon^2 \mathrm{d}\ell = \lambda\,\mathrm{d}\ell$.

— La charge δQ, contenue sur une longueur mésoscopique dℓ, est décrite par la **densité linéique de charge** ou charge linéique $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boxed{\delta Q = \lambda(M)\,\mathrm{d}\ell}$$

λ s'exprime en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

— La charge totale portée par la longueur $\mathcal{L}$ est

$$\boxed{Q = \int_{M\in\mathcal{L}} \lambda(M)\,\mathrm{d}\ell\,.}$$

Remarque : Le principe de superposition s'applique également pour exprimer le champ $\vec{E}(M)$ engendré par une distribution surfacique ou linéique de charge.

III. Potentiel électrostatique

1. Outils mathématiques

. Notion de champ

Un champ est une grandeur physique qui est fonction de la position du point M où on le considère et éventuellement du temps. Un champ peut être scalaire ou vectoriel. Dans cette leçon, les champs considérés sont stationnaires (ne dépendent pas du temps).

Exemples de champ stationnaires :

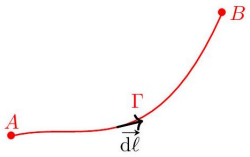
— Pression atmosphérique notée $P(M) \rightarrow$ champ scalaire ;

— Champ électrostatique créé par une charge électrique, noté $\overrightarrow{E}(M) \rightarrow$ champ vectoriel.

. Circulation d'un champ vectoriel

La **circulation** d'un champ vectoriel $\overrightarrow{a}$ le long d'une courbe orientée Γ (c'est-à-dire sur laquelle on a défini un sens positif) allant d'un point A à un point B est l'intégrale

$$\mathcal{C}_{AB}^{\Gamma} = \int_{\Gamma} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$



avec $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ le vecteur infinitésimal tangent à Γ.

Si la courbe est fermée, on a $A = B$ et on note l'intégrale $\mathcal{C}^{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$.

Exemple : Le travail du poids d'un objet en déplacement correspond à une circulation.

Les propriétés élémentaires de l'intégrale ont les conséquences suivantes :

— la circulation d'une somme de champ est la somme des circulations ;

— la circulation change de signe si l'on change le sens de parcours de Γ ;

— la circulation vérifie la relation $\mathcal{C}_{AC}^{\Gamma_1+\Gamma_2} = \mathcal{C}_{AB}^{\Gamma_1} + \mathcal{C}_{BC}^{\Gamma_2}$.

. Gradient d'un champ scalaire

— Le **gradient** est la généralisation en 3 dimensions de la dérivée spatiale pour une fonction f de trois coordonnées d'espace. C'est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ dont :

  ✓ la direction est celle de la plus grande pente ;

  ✓ le sens indique la croissance de f ;

  ✓ la norme est proportionnelle à la pente.

— On définit le **gradient** d'une fonction scalaire f. En coordonnées cartésiennes (x, y, z), il s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\overrightarrow{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\overrightarrow{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\overrightarrow{e}_z}$$

Dans d'autres systèmes de coordonnées, l'expression du gradient est différente. En coordonnées cylindriques (ρ, θ, z), il s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\rho,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho,\theta,z)\overrightarrow{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}(\rho,\theta,z)\overrightarrow{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}(\rho,\theta,z)\overrightarrow{e}_z}$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ), il s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e}_\varphi}$$

. Différentielle d'une fonction

Entre deux positions M et M' infiniment voisines, avec $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{d\ell}$, on peut caractériser les variations spatiales d'un champ scalaire $f(M)$ par son gradient défini par la relation :

$$\boxed{\mathrm{d}f = f(M') - f(M) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$$

avec $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ le déplacement élémentaire.

L'intégrale de $\mathrm{d}f$ sur Γ, notée $\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{d}f$ ou $\displaystyle\int_A^B \mathrm{d}f$, vérifie : $\displaystyle\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$.

Elle ne dépend pas du chemin suivi, uniquement des points de départ et d'arrivée, et représente la variation de f entre A et B.

2. Potentiel électrostatique pour une charge ponctuelle ⋆

Considérons une charge ponctuelle q placée en un point O. Le champ électrostatique créé par cette charge en un point M situé à la distance r de O s'écrit :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{e}_r.$$

Considérons un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ du point M.

La circulation élémentaire du champ électrostatique est définie par : $\delta\mathcal{C} = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$.

Dans le cas d'une charge ponctuelle, le champ est radial. Ainsi : $\overrightarrow{e}_r \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r$.

On obtient donc :

$$\delta\mathcal{C} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\mathrm{d}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right).$$

En intégrant entre deux points A et B :

$$\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta\mathcal{C} = -\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{\mathrm{B}}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{\mathrm{A}}}\right).$$

La circulation du champ électrostatique entre deux points ne dépend donc que des positions des points A et B, et non du chemin suivi. Le champ électrostatique est ainsi un **champ conservatif**.

On peut alors introduire une fonction scalaire V, appelée **potentiel électrostatique**, telle que :

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = -\left[V(\mathrm{B}) - V(\mathrm{A})\right]}$$

Pour une charge ponctuelle, on identifie alors :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + K,$$

où K est une constante additive.

On choisit généralement $V = 0$ lorsque $r \to +\infty$, ce qui conduit à :

$$\boxed{V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

Remarques :

- L'unité du potentiel est le **volt**.
- **Les potentiels créés par différentes sources sont additifs**. Ils respectent également le principe de superposition.

3. Du potentiel électrostatique au champ électrostatique ⋆

Considérons le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q placée en O :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

En coordonnées sphériques, le gradient d'une fonction scalaire $V(r,\theta,\varphi)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Dans le cas d'une charge ponctuelle, le potentiel ne dépend que de la distance r. On a donc :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0.$$

Le gradient du potentiel se réduit alors à :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\text{d}V}{\text{d}r}\vec{e}_r.$$

Or,

$$\frac{\text{d}V}{\text{d}r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

On identifie ce résultat au champ électrostatique créé par une charge ponctuelle : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$.

On obtient donc la relation générale entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V}$$

Le champ électrostatique est ainsi entièrement déterminé par les variations spatiales du potentiel électrostatique.

Remarque : On peut donc exprimer le champ électrique $\vec{E}$ à partir de V. Réciproquement, il est possible d'exprimer un différence de potentiel, soit un tension, à partir du champ électrostatique :

$$\mathcal{C}_{AB} = \int_\Gamma \vec{E}\cdot\text{d}\vec{\ell} = -\int_\Gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, V\cdot\text{d}\vec{\ell} = -(V(B)-V(A)) = V(A)-V(B)$$

.

La circulation entre deux points du champ électrostatique représente la différence de potentiel, ou tension, entre ces points, soit $\mathcal{C}_{AB} = U_{AB}$.

4. Potentiel électrostatique et énergie électrostatique ⋆

On considère une charge ponctuelle q placée en un point M d'un champ électrostatique extérieur $\vec{E}$, auquel on associe le potentiel électrostatique V.

La charge q est soumise à la force électrostatique de Lorentz :

$$\vec{F}_{\text{E}} = q\vec{E}.$$

Lors d'un déplacement élémentaire $\text{d}\vec{\ell}$, le travail élémentaire de cette force est :

$$\delta W = \vec{F}_{\text{E}}\cdot\text{d}\vec{\ell} = q\vec{E}\cdot\text{d}\vec{\ell}.$$

Or le champ électrostatique dérive du potentiel électrostatique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V.$$

Ainsi :

$$\delta W = -q\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -q\,\mathrm{d}V.$$

La charge q étant constante, on peut écrire :

$$\delta W = -\mathrm{d}(qV).$$

Par définition, une force conservative dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ telle que :

$$\delta W = -\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}.$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle électrostatique :

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{p}(M) = q\,V(M)}$$

L'énergie potentielle électrostatique est définie à une constante près, tout comme le potentiel électrostatique. Le travail de la force électrostatique entre deux points ne dépend donc pas du chemin suivi : la force électrostatique est une force conservative.

IV. Cartes de champ et de potentiel

1. Définitions

Les lignes de champ du champ électrostatique sont par définition les lignes tangentes en chaque point au champ électrostatique, orientées dans le sens du champ.

Les équipotentielles sont des surfaces sur lesquelles le potentiel électrostatique a une même valeur.

2. Position relative des équipotentielles et des lignes de champ

Application n°3 : Equipotentielles et lignes de champ

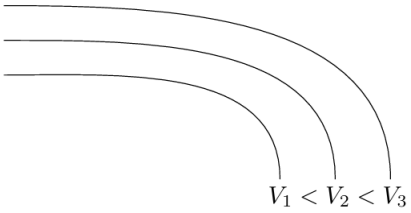
Énoncé

1. Rappeler la relation entre $\overrightarrow{E}$ et V et en déduire que la différentielle $\mathrm{d}V$ peut s'exprimer à partir de $\overrightarrow{E}$ et d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$.

2. Si le déplacement élémentaire se fait suivant une équipotentielle, comment varie V ? En déduire la position relative de $\overrightarrow{E}$ par rapport à une équipotentielle.

3. Le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ se fait maintenant suivant une ligne de champ. Quel est alors le signe de $\mathrm{d}V$? Comment évolue V suivant une ligne de champ électrostatique ?

4. Dessiner des lignes de champ sur le schéma ci-dessous. Une ligne de champ peut-elle être fermée ?



Correction

1. La relation : $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$
permet d'exprimer la variation $\mathrm{d}V$ du potentiel pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$:

$$\mathrm{d}V = \overrightarrow{\text{grad}}\,V \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}.$$

2. Si $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ appartient à une équipotentielle, alors : $\mathrm{d}V = 0$.
Ainsi,

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

Les lignes de champ sont donc **orthogonales aux surfaces équipotentielles**.

3. Si le déplacement élémentaire se fait dans le sens de la ligne de champ, les vecteurs $\vec{E}$ et $\mathrm{d}\vec{\ell}$ sont colinéaires et de même sens. On a alors :

$$\mathrm{d}V = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\|\vec{E}\| \, \|\mathrm{d}\vec{\ell}\| < 0.$$

Le potentiel électrostatique **décroît dans le sens des lignes de champ**.

4. Une ligne de champ électrostatique ne peut pas être fermée : en suivant une ligne de champ, le potentiel doit toujours décroître. Une ligne fermée conduirait à retrouver le même potentiel après un tour complet, ce qui est impossible.

Application n°4 : Orienter les lignes de champ électrostatique créées par une distribution de charges ; représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement

Énoncé

On rappelle que, dans le cas d'une charge ponctuelle, le champ électrostatique s'exprime en coordonnées sphériques comme :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r,$$

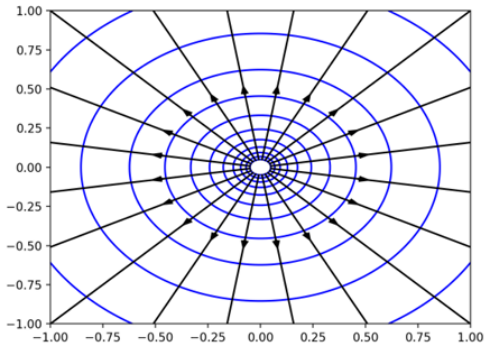
et le potentiel électrostatique comme :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

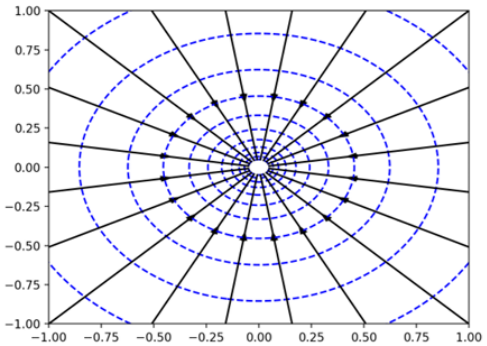
en choisissant $V(\infty) = 0$.

Représenter ci-dessous l'allure des lignes de champ et des équipotentielles dans le cas d'une charge positive puis négative, ainsi que l'allure de $V(r)$.

Correction



(a) Charge positive.



(b) Charge négative.

Quelques propriétés des lignes de champ et des équipotentielles :

— Les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles.
— Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.
— Les lignes de champ divergent des charges positives et convergent vers les charges négatives.
— Les extremas locaux de potentiel se trouvent au niveau des charges électriques : maximum au niveau d'une charge positive, minimum au niveau d'une charge négative.
— Dans une région vide de charges, l'intensité du champ électrostatique augmente quand les lignes de champ se resserrent et diminue quand les lignes de champ s'écartent.

VI Théorème de Gauss

Pour les distributions continues de charges, le calcul direct du champ créé peut être fastidieux. Il existe heureusement un outil permettant de s'affranchir de l'essentiel de ces calculs, à condition que la distribution de charges possède des **propriétés d'invariances** et de **symétries**.

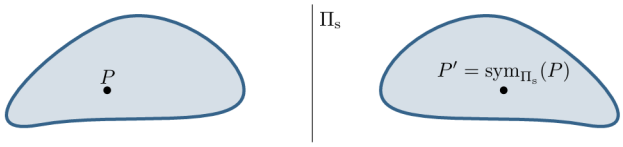
1. Principe de Curie

Les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. Ici, les symétries et invariances de la **distribution de charges (cause)** vont influencer les symétries et invariances du **champ électrostatique et du potentiel (effet)**.

2. Plan de symétrie de la distribution de charge et conséquence pour le champ électrostatique

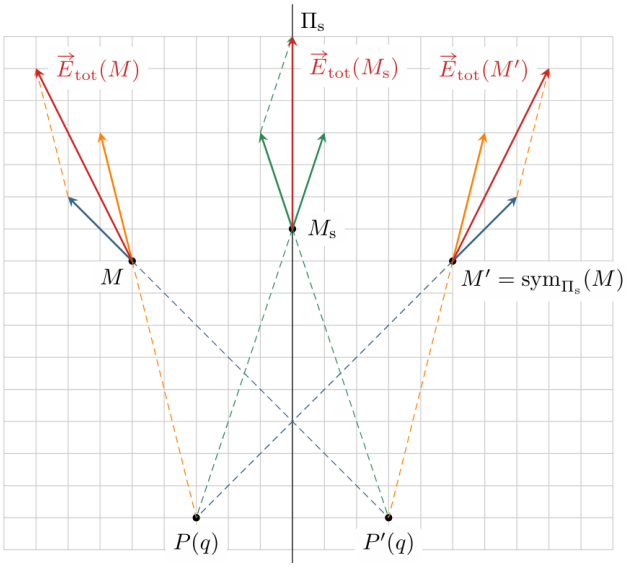
. Plan de symétrie de la distribution de charges

Une distribution de charge possède un **plan de symétrie** Π_s lorsque les (densités de) charges en tous points P et P' symétriques par rapport à Π_s sont égales, $\rho(P') = \rho(P)$



. Conséquence pour le champ électrostatique

Pour comprendre, construisons pas à pas le champ créé par deux charges ponctuelles identiques q situées en P et P'.



Les champs tracés d'une même couleur ont la même norme (mais pas la même direction) car la distance est la même. Par exemple, on a par symétrie

$$PM = P'M'.$$

Or la loi de Coulomb indique que la norme du champ créé par une charge ponctuelle ne dépend que de la distance à cette charge. Ainsi,

$$\left\|\vec{E}_P(M)\right\| = \left\|\vec{E}_{P'}(M')\right\|$$

De même,

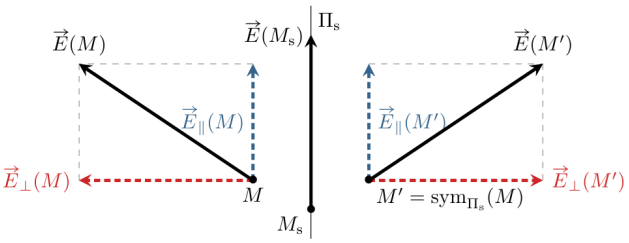
$$P'M = PM' \quad \text{et} \quad PM_s = P'M_s,$$

d'où l'égalité des normes des champs.

Bilan : Plan de symétrie et conséquences

Soit une distribution de charges possédant un plan de symétrie Π_s. Les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_s sont eux-mêmes symétriques par rapport à Π_s.

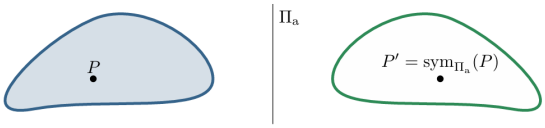
Le champ électrostatique $\vec{E}(M_s)$ en un point M_s appartenant au plan Π_s est inclus dans ce plan.

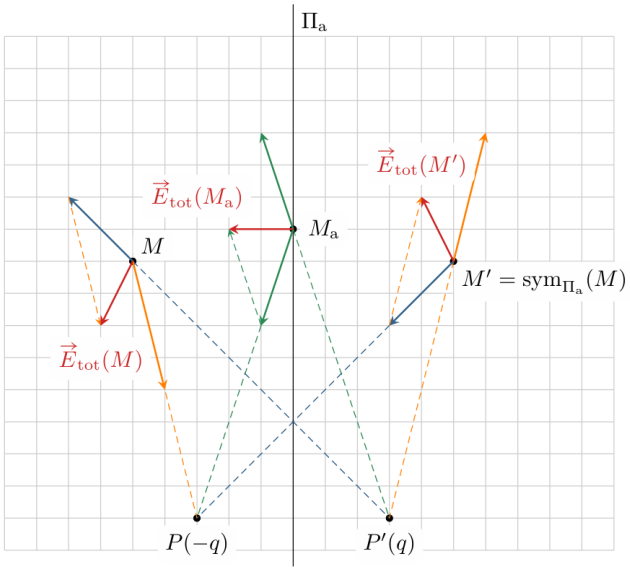


3. Plan d'antisymétrie de la distribution de charge et conséquence pour le champ électrostatique

Une distribution de charge possède un plan d'anti-symétrie Π_a lorsque les (densités de) charges en tous points P et P' symétriques par rapport à Π_a sont opposées :

$$\rho(P') = -\rho(P).$$



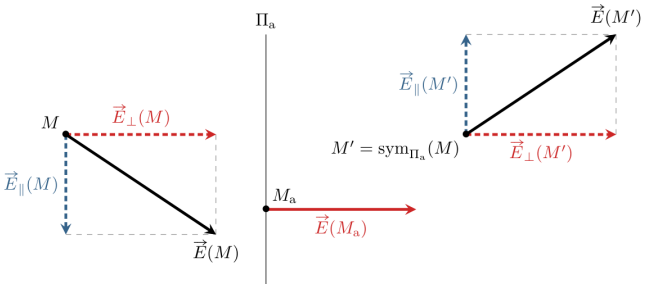


Conséquence pour le champ électrostatique :
Pour comprendre, reprenons l'exemple précédent en supposant cette fois les charges opposées.

Bilan : Plan d'antisymétrie et conséquences

Soit une distribution de charges possédant un plan d'antisymétrie Π_a. Les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_a sont anti-symétriques par rapport à Π_a.

Le champ électrostatique $\vec{E}(M_a)$ en un point M_a appartenant au plan Π_a est orthogonal à ce plan.



Application n°5 : Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries d'une distribution de charges

Énoncé :
On considère ci-contre les lignes de champ d'un dipôle électrique.

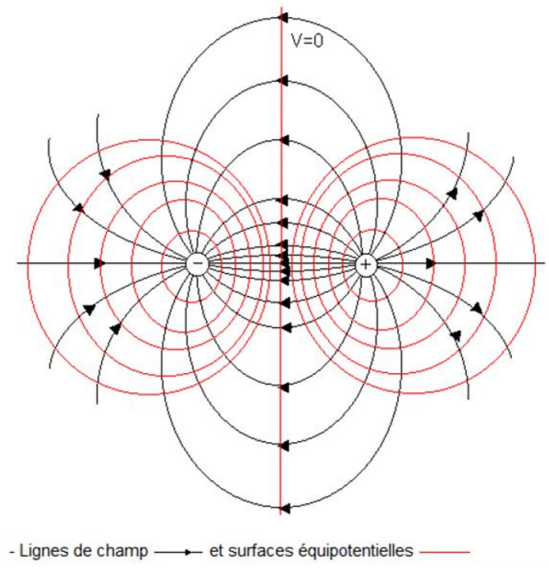
1. Déterminer les plans Π_s de symétrie et Π_a d'antisymétrie de la distribution de charges.

2. Choisir deux points M et M' symétriques par rapport à un plan d'antisymétrie de la distribution de charges. Représenter les champs électriques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ en M et M'. Que peut-on dire ?

3. Comment est le champ électrique en un point M_a du plan d'antisymétrie ?

4. Choisir deux points M_1 et M_2 symétriques par rapport à un plan de symétrie de la distribution de charges. Représenter les champs électriques $\vec{E}(M_1)$ et $\vec{E}(M_2)$ en M_1 et M_2. Que peut-on dire ?

5. Comment est le champ électrique en un point M_s du plan de symétrie ?



Correction :

1. Tout plan contenant le segment reliant les deux charges est un plan de symétrie de la distribution de charges. Le plan médiateur situé entre les deux charges est un plan d'antisymétrie.

2. On vérifie bien :

$$\overrightarrow{E}(M') = -\,\mathrm{sym}_{\Pi_a}\left(\overrightarrow{E}(M)\right).$$

3. On vérifie bien :

$$\overrightarrow{E}(M_a) \perp \Pi_a.$$

4. On vérifie bien :

$$\overrightarrow{E}(M_1) = \mathrm{sym}_{\Pi_s}\left(\overrightarrow{E}(M_2)\right).$$

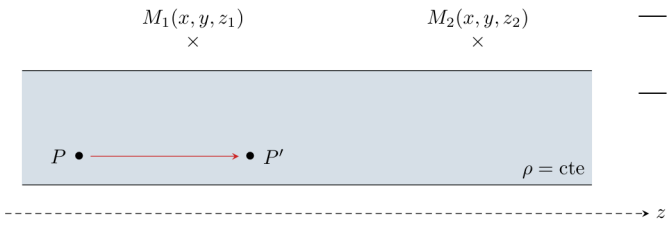
5. On vérifie bien :

$$\overrightarrow{E}(M_s) \in \Pi_s.$$

4. Invariances de la distribution de charge

. Invariance par translation le long d'un axe

Un exemple pour comprendre : plaque infinie dans la direction (Oz).

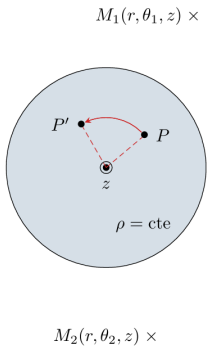


— **Traduction de l'invariance** sur ρ : $\rho(P)$ indépendant de la coordonnée z du point P.

— **Conséquence sur le champ électrostatique** : La distribution étant invariante par translation suivant $\overrightarrow{e}_z$, elle est identique vue des points M_1 et M_2. On en déduit que le champ créé ne dépend pas de leur coordonnée z.

. Invariance par rotation autour d'un axe

Un exemple pour comprendre : cylindre infini dans la direction (Oz).



— **Traduction de l'invariance** sur ρ : $\rho(P)$ indépendant de la coordonnée angulaire θ du point P.

— **Conséquence sur le champ électrostatique** : La distribution étant invariante par rotation autour de l'axe (Oz), elle est identique vue des points M_1 et M_2. On en déduit que la norme du champ créé ne dépend pas de leur coordonnée θ (mais sa direction en dépend).

Bilan : Invariances d'une distribution de charges

Invariance par translation :

Si une distribution de charges est invariante par translation le long d'un axe, alors le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ ne dépendent pas de la coordonnée du point M selon cet axe.

Invariance par rotation :

Si une distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe, alors la norme du champ électrostatique $\left\|\overrightarrow{E}(M)\right\|$ et le potentiel $V(M)$ ne dépendent pas de la coordonnée angulaire θ du point M autour de cet axe.

5. Application du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est un théorème qui permet un calcul relativement simple du champ électrostatique créé par des **distributions à haut degré de symétrie**. Il est toujours valable, mais inefficace, dans les autres cas.

Énoncé : Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée (appelée surface de Gauss) est relié à la charge contenue à l'intérieur de cette surface :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

où le vecteur $\vec{\mathrm{d}S}$ est orienté vers l'exérieur.

Méthode – Utiliser le théorème de Gauss

1. Choisir un système de coordonnées approprié à la distribution de charges.
2. Étudier les symétries et invariances de la distribution de charges et en déduire la direction du champ $\vec{E}(M)$ et la (les) variable(s) dont il dépend.
3. Choisir judicieusement la surface de Gauss : ce doit être une surface fermée. On la choisit de sorte que le calcul du flux de $\vec{E}(M)$ à travers cette surface soit le plus simple possible : on cherche une surface telle qu'en tout point de la surface, la normale à la surface soit colinéaire ou orthogonale à $\vec{E}(M)$.
4. Déterminer le flux du champ $\vec{E}(M)$ à travers la surface de Gauss.
5. Déterminer la charge électrique contenue à l'intérieur de la surface de Gauss.
6. Appliquer le théorème de Gauss pour en déduire $\vec{E}(M)$.

. Exemple n°1 : Cylindre uniformément chargé en volume

Application n°6 : Établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un cylindre infini uniformément chargé en volume

Énoncé :

On considère un cylindre de rayon R, de longueur infinie, et uniformément chargé, de densité volumique de charge ρ_0.

En suivant la méthode précédente, établir l'expression du champ électrostatique créé par le cylindre.

Correction :

Choix du système de coordonnées : coordonnées cylindriques.

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$$

Symétries : les plans $\Pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $\Pi_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges.
Le champ électrostatique appartient donc à ces deux plans :

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{e}_r$$

Invariances : la distribution de charges est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) et par toute translation suivant cet axe.

$$\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r}$$

Surface de Gauss : on choisit un cylindre d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur h, passant par le point M.

Calcul du flux : le flux du champ électrostatique à travers la surface de Gauss s'écrit :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\text{surface latérale}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 + \iint_{\text{face supérieure}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 + \iint_{\text{face inférieure}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_3.$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est dirigé selon $\vec{e}_r$, tandis que $\mathrm{d}\vec{S}_2$ et $\mathrm{d}\vec{S}_3$ sont dirigés selon $\pm\vec{e}_z$. Ainsi,

$$\vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_3 = 0.$$

Les faces supérieure et inférieure ne contribuent donc pas au flux.
Sur la surface latérale,

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\vec{S}_1 = \mathrm{d}S_1\,\vec{e}_r.$$

Ainsi,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\text{surface latérale}} E_r(r)\,\mathrm{d}S_1.$$

Sur la surface latérale du cylindre de Gauss, r est constant. La grandeur $E_r(r)$ est donc constante sur cette surface et peut être sortie de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= E_r(r) \iint_{\text{surface latérale}} \mathrm{d}S_1 \\ &= \boxed{E_r(r)\,2\pi rh}.\end{aligned}$$

car $2\pi rh$ est l'aire de la surface latérale du cylindre de Gauss.

Charge électrique intérieure : La charge Q_{int} dépend du rayon r. En effet, si $r > R$, tout la portion h de la distribution est englobée dans la surface de Gauss alors que, dans le cas contraire, seule une fraction de la charge est à l'intérieur de la surface de Gauss.
On a donc

$$\boxed{Q_{\text{int}} = \begin{cases} \pi r^2 h\rho_0 & \text{si } r < R \\ \pi R^2 h\rho_0 & \text{si } r > R\,. \end{cases}}$$

Application du théorème de Gauss : On en déduit donc en appliquant le théorème que

$$\boxed{\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{\rho_0 R^2}{2r\varepsilon_0}\vec{e}_r & \text{si } r > R\,. \end{cases}}$$

On constate que le champ est continu en $r = R$, c'est-à-dire entre l'intérieur et l'extérieur de la distribution. Ce constat se généralise : pour des distributions volumiques, le champ est toujours continu en tout point de l'espace.

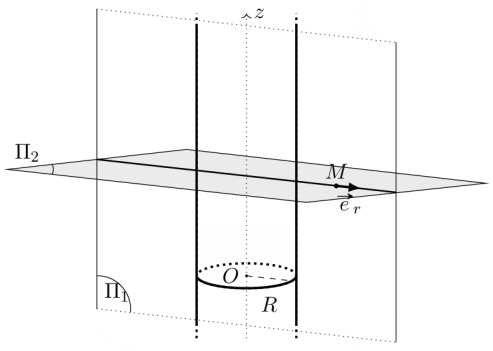


Figure 1 – Symétries du cylindre infini.

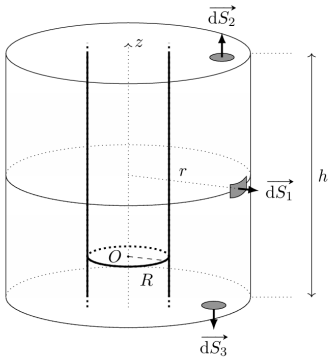


Figure 2 – Surface de Gauss du cylindre infini.

. Exemple n°2 : Sphère chargée en volume

Application n°7 : Établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume.

Énoncé :

On considère une sphère de rayon R, uniformément chargée, de densité volumique de charge ρ_0.

1. Établir l'expression du champ électrostatique créé par la sphère.

2. Montrer qu'à l'extérieur de la sphère chargée, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle portant la charge totale de la sphère.

Correction :

1. Choix du système de coordonnées : coordonnées sphériques.
A priori, le champ électrostatique au point M s'écrit :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e}_\varphi.$$

Symétries : considérons un plan passant par la droite OM. Ce plan est un plan de symétrie de la distribution de charges. Cette propriété est vraie pour tous les plans passant par la droite OM. Le champ électrostatique appartient donc à tous ces plans.
L'intersection de tous ces plans est la droite OM, portée par $\overrightarrow{e}_r$. Ainsi,

$$\overrightarrow{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e}_r.$$

Invariances : la distribution de charges est invariante par toute rotation autour d'un axe passant par O. Le champ ne dépend donc pas des coordonnées angulaires θ et φ.

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E_r(r)\overrightarrow{e}_r}$$

Surface de Gauss : on choisit une sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon r, passant par le point M.

Calcul du flux : sur la surface de Gauss,

$$\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}S\,\overrightarrow{e}_r.$$

Ainsi,

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}(M)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{\mathcal{S}} E_r(r)\,\mathrm{d}S.$$

Sur une sphère de rayon r, $E_r(r)$ est constant et peut donc être sorti de l'intégrale. On obtient :

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}(M)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = E_r(r)\iint_{\mathcal{S}}\mathrm{d}S = \boxed{E_r(r)\,4\pi r^2}.$$

Charge électrique intérieure : la charge Q_{int} dépend du rayon r. Si $r < R$, seule une partie de la distribution de charges est contenue dans la surface de Gauss. Si $r > R$, la totalité de la charge est contenue dans la surface de Gauss.

$$\boxed{Q_{\text{int}} = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho_0 & \text{si } r < R, \\ \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho_0 = Q_0 & \text{si } r > R. \end{cases}}$$

où Q_0 désigne la charge totale de la sphère :

$$Q_0 = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0.$$

Application du théorème de Gauss :

$$E_r(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \Longrightarrow \qquad E_r(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}.$$

En distinguant l'intérieur et l'extérieur de la sphère chargée, on obtient finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_r & \text{si } r < R, \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r & \text{si } r > R. \end{cases}}$$

2. Pour $r > R$, on constate que le champ électrostatique s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r}$$

Cette expression est exactement celle du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle Q_0 placée en O.

Ainsi, **à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique est identique à celui d'une charge ponctuelle portant la charge totale de la distribution et placée en son centre**.

. Exemple n°3 : Plan infini chargé en surface

Application n°8 : Établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace par un plan infini uniformément chargé en surface

Énoncé :

On considère un plan infiniment fin chargé en surface avec une densité surfacique de charge σ. Le plan xOy est confondu avec le plan chargé.

1. Établir l'expression du champ électrostatique créé par le plan.

Correction :

1. Choix du système de coordonnées : coordonnées cylindriques (les coordonnées cartésiennes conviendraient également).
A priori, le champ électrostatique au point M s'écrit :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\overrightarrow{e}_z.$$

Symétries : considérons un plan contenant le point M et orthogonal au plan chargé. Ce plan est un plan de symétrie de la distribution de charges.
Cette propriété étant vraie pour tous les plans contenant M et orthogonaux au plan chargé, le champ appartient à tous ces plans. Il est donc dirigé selon $\overrightarrow{e}_z$:

$$\overrightarrow{E}(M) = E_z(r,\theta,z)\overrightarrow{e}_z.$$

Invariances : le plan chargé est infini et uniformément chargé. La distribution de charges est donc invariante par toute translation selon Ox ou selon Oy.
Le champ ne dépend donc ni de r, ni de θ, mais uniquement de la coordonnée z :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E_z(z)\overrightarrow{e}_z}$$

De plus, le plan chargé est lui-même un plan de symétrie de la distribution. Les champs en deux points symétriques par rapport au plan xOy sont donc opposés :

$$E_z(z) = -E_z(-z).$$

La fonction $E_z(z)$ est donc impaire.

Surface de Gauss : on choisit un cylindre $\mathcal{C}$ d'axe (Oz), de rayon r et dont les deux bases sont situées aux altitudes z et $-z$.

Calcul du flux : le flux du champ électrostatique à travers la surface de Gauss s'écrit :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\text{surface latérale}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 + \iint_{\text{face supérieure}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 + \iint_{\text{face inférieure}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_3.$$

Sur la surface latérale, $\mathrm{d}\vec{S}_1$ est dirigé selon $\vec{e}_r$, tandis que le champ est dirigé selon $\vec{e}_z$. Ainsi,

$$\vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 = 0.$$

La surface latérale ne contribue donc pas au flux.
Sur les deux bases du cylindre,

$$\mathrm{d}\vec{S}_2 = \mathrm{d}S_2\,\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\vec{S}_3 = -\mathrm{d}S_3\,\vec{e}_z.$$

On obtient alors :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E_z(z) \iint_{\text{face supérieure}} \mathrm{d}S_2 - E_z(-z) \iint_{\text{face inférieure}} \mathrm{d}S_3.$$

Les deux faces ont la même surface S. Comme $E_z(z) = -E_z(-z)$, on obtient :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \boxed{2E_z(z)S}.$$

Charge électrique intérieure : par définition de la densité surfacique de charge,

$$\boxed{Q_{\text{int}} = \sigma S}$$

Application du théorème de Gauss :

$$2E_z(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

On en déduit :

$$\boxed{E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \qquad \text{pour } z > 0.$$

Par imparité de $E_z(z)$:

$$\boxed{E_z(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \qquad \text{pour } z < 0.$$

Ainsi, le champ électrostatique créé par le plan infini est :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z > 0, \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{si } z < 0. \end{cases}}$$

On remarque que la norme du champ ne dépend pas de la distance au plan chargé.

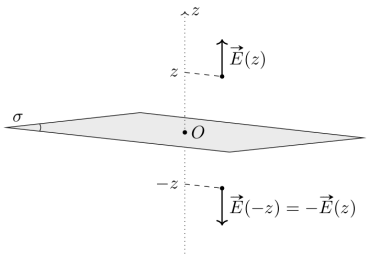


Figure 3 – Symétries du plan infini.

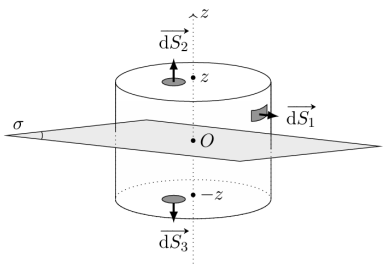
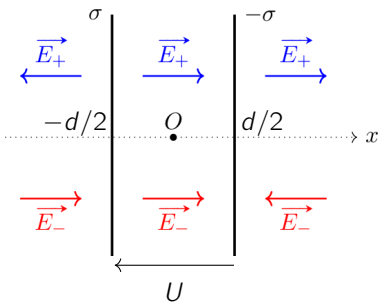


Figure 4 – Surface de Gauss du plan infini.

6. Le condensateur plan ⋆

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques planes, parallèles et de même surface S, séparées d'une distance d.



On néglige les effets de bord ce qui revient à supposer :

$$d \ll \sqrt{S}$$

Les armatures peuvent alors être assimilées à deux plans infinis uniformément chargés en surface, portant respectivement les densités de charge $+\sigma$ et $-\sigma$.

Le champ créé par un plan infini uniformément chargé est normal au plan et sa norme vaut $\sigma/(2\varepsilon_0)$. Ainsi, pour l'armature positive située en $x = -d/2$:

$$\vec{E}_+(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x > -d/2, \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x < -d/2. \end{cases}$$

Pour l'armature négative située en $x = d/2$:

$$\vec{E}_-(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x > d/2, \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x < d/2. \end{cases}$$

Par principe de superposition, le champ total est la somme des champs créés par les deux armatures. Entre les armatures, les champs sont de même sens et s'ajoutent ; à l'extérieur, ils sont de sens opposés et se compensent.

$$\boxed{\vec{E}_{\text{tot}} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } |x| < d/2, \\ \vec{0} & \text{si } |x| > d/2. \end{cases}}$$

Le champ électrostatique est donc uniforme entre les armatures et dirigé de l'armature positive vers l'armature négative.

Le champ électrostatique est dirigé vers les potentiels décroissants. On a donc :

$$V_+ > V_-.$$

En notant U la tension entre les deux armatures :

$$\boxed{U = V_+ - V_- > 0}$$

Le champ étant normal aux armatures, les surfaces équipotentielles sont parallèles aux armatures.

Considérons maintenant un point A de l'armature positive et un point B de l'armature négative. La circulation du champ électrostatique entre ces deux points vaut :

$$\mathcal{C}_{AB} = \int_A^B \vec{E}_{\text{tot}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

Entre les armatures, $\vec{E}_{\text{tot}} = (\sigma/\varepsilon_0)\vec{e}_x$ et $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x$. Ainsi :

$$\mathcal{C}_{AB} = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}.$$

Or, pour un champ électrostatique, la circulation entre deux points est reliée à la différence de potentiel par :

$$\mathcal{C}_{AB} = V(A) - V(B).$$

Avec A sur l'armature positive et B sur l'armature négative :

$$\mathcal{C}_{AB} = V_+ - V_- = U.$$

On obtient donc :

$$\boxed{U = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}}$$

La charge portée par une armature est reliée à la densité surfacique de charge par :

$$\boxed{Q = \sigma S}$$

La capacité d'un condensateur est définie par :

$$C = \frac{Q}{U}.$$

En utilisant les expressions précédentes :

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}}$$

d'où :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

La capacité d'un condensateur plan dans le vide augmente donc avec la surface des armatures et diminue lorsque la distance entre les armatures augmente.

7. Analogie électrostatique – gravitation

Tout ce qui a été vu précédemment découle de la **loi de Coulomb** et du **principe de superposition**. Sachant que la force gravitationnelle entre deux masses ponctuelles, la **loi universelle de la gravitation de Newton**, a quasiment la même forme que la force de Coulomb, et que le principe de superposition est vrai aussi pour la gravitation, il en découle une analogie entre ces deux domaines de la physique, a priori séparés, dressée dans le tableau ci-dessous :

	Électrostatique	**Gravitation**
Force	$\overrightarrow{F}_{\text{e}} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\overrightarrow{e}_r$	$\overrightarrow{F}_{\text{g}} = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\,\overrightarrow{e}_r$
Source	Charge q	Masse m
Constante	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$\mathcal{G}$
Champ	$\overrightarrow{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\overrightarrow{e}_r$	$\overrightarrow{G} = -\mathcal{G}\dfrac{m}{r^2}\,\overrightarrow{e}_r$
Théorème de Gauss	$\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	$\oiint_S \overrightarrow{G}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = -4\pi\mathcal{G}\,M_{\text{int}}$
Énergie potentielle	$\mathcal{E}_{\text{pe}} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\mathcal{E}_{\text{pg}} = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r}$
Potentiel	$V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\Phi = -\mathcal{G}\dfrac{m}{r}$

Les applications du **théorème de Gauss** vues en électrostatique peuvent donc être transposées au domaine gravitationnel, en remplaçant le préfacteur $\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ par $-4\pi\mathcal{G}$.

On notera en particulier que le **champ de gravitation dû à un astre assimilé à une boule** de masse volumique $\rho_{\text{m}}(\text{r})$ à symétrie sphérique est le même, en dehors de l'astre, que celui d'une **masse ponctuelle de même masse que l'astre**, située en son centre. Ceci explique pourquoi jusqu'à présent, les planètes et les étoiles ont été assimilées à des points matériels.

VI. Le dipôle électrostatique

Le concept de dipôle décrit de nombreuses molécules en chimie et permet notamment d'expliquer les interactions de nature électrostatique entre les molécules.

1. Définitions

— On appelle **dipôle électrostatique** le système constitué par deux charges opposées $-q$ et $+q > 0$ placée respectivement en deux points N et P.

— On appelle **moment du dipôle (ou dipolaire)** le vecteur $\vec{p}$ défini par $\boxed{\vec{p} = q\overrightarrow{NP}}$.

— La norme du moment dipolaire $\|\vec{p}\|$ s'exprime en C · m ou en D (Debye), avec $1\,\text{D} = 3{,}3 \times 10^{-30}\,\text{C}\cdot\text{m}$.

Le **moment dipolaire des molécules est de l'ordre de** $\boxed{0{,}1\,\text{D}}$ **à** $\boxed{2\,\text{D}}$.
ex : monoxyde de carbone CO : $p_{CO} = 0{,}11\,\text{D}$; chlorure d'hydrogène HCl : $p_{HCl} = 1{,}08\,\text{D}$;
eau H_2O : $p_{H_2O} = 1{,}85\,\text{D}$

Application n°9 : Donner un ordre de grandeur de moment dipolaire

Énoncé :

Retrouver qualitativement un ordre de grandeur de moment dipolaire à l'échelle microscopique.

Correction :

On a :

$$\|\vec{p}\| \sim 1 \times 10^{-29}\,\text{C}\cdot\text{m}$$

avec

$$q \sim e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C} \qquad \text{et} \qquad \|\overrightarrow{NP}\| \sim 1 \times 10^{-10}\,\text{m}.$$

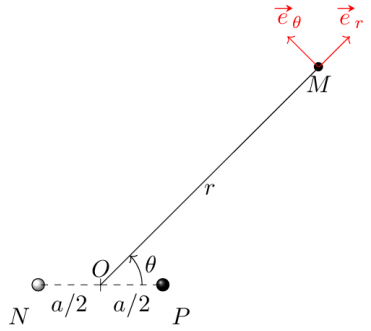
Les molécules ont en pratique des charges partielles ($q < e$), ce qui ramène $\|\vec{p}\|$ à l'ordre de $1 \times 10^{-30}\,\text{C m}$ à $1 \times 10^{-29}\,\text{C m}$, soit environ 0,1 à 2 D.

2. Potentiel électrostatique créé par un dipôle ⋆

On se place dans le cadre de **l'approximation dipolaire** qui consiste à supposer que la distance $a = NP$ est négligeable devant toutes les autres distances considérées.

Dans ce cadre, on n'étudiera les champs et les potentiels que loin du dipôle.

Considérons un dipôle constitué de deux charges $+q$ et $-q$ séparées d'une distance a. On note O le milieu de $[PN]$ et $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$ le moment dipolaire.



En un point M repéré par (r, θ), le potentiel électrostatique s'obtient par superposition :

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)}$$

La géométrie donne :

$$PM = r\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}, \qquad NM = r\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \left(\frac{a}{2r}\right)^2}.$$

Dans l'approximation dipolaire, $r \gg a$. On a alors $(a/2r)^2 \ll a/r$ et :

$$PM \simeq r\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta}, \qquad NM \simeq r\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta}.$$

En utilisant le développement limité :

$$(1+Y)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{Y}{2} \qquad \text{pour } |Y| \ll 1,$$

on obtient :

$$\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right), \qquad \frac{1}{NM} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right).$$

Ainsi :

$$V(M) \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}.$$

Comme $\|\overrightarrow{p}\| = qa$ et $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{e}_r = \|\overrightarrow{p}\|\cos\theta$, on obtient :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{e}_r}{r^2}}$$

Le potentiel d'un dipôle décroît donc en $1/r^2$, contre $1/r$ pour une charge ponctuelle, et dépend de la direction θ :

$$\boxed{V_{\text{dipôle}} \propto \frac{\cos\theta}{r^2}} \qquad \text{contre} \qquad \boxed{V_{\text{charge}} \propto \frac{1}{r}}$$

3. Calcul du champ électrique créé par un dipôle électrostatique ⋆

À partir du potentiel créé par un dipôle :

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\|\overrightarrow{p}\|\cos\theta}{r^2},$$

On peut déterminer le champ électrostatique à l'aide de la relation :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V.$$

En coordonnées sphériques, et dans le cas où V ne dépend que de r et θ, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e}_\theta.$$

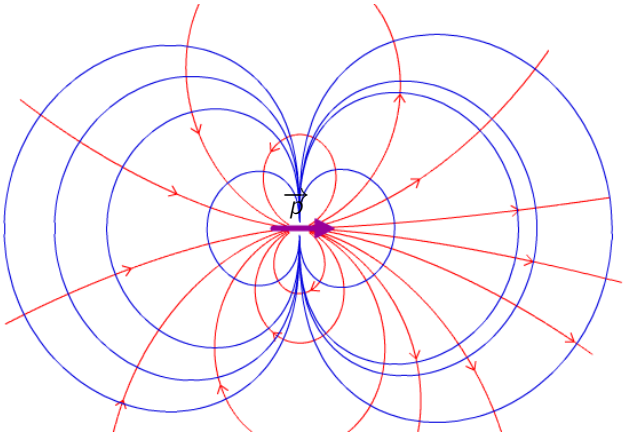
Les dérivées du potentiel sont :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\|\overrightarrow{p}\|\cos\theta}{r^3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\|\overrightarrow{p}\|\sin\theta}{r^2}.$$

On obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\|\overrightarrow{p}\|}{r^3}\left(2\cos\theta\,\overrightarrow{e}_r + \sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta\right)}$$

Le champ créé par un dipôle décroît donc en $1/r^3$, alors que son potentiel décroît en $1/r^2$.



Lignes de champ (en rouge fléchées) et équipotentielles (en bleu) créées par un dipôle électrostatique dans l'approximation dipolaire.

4. Action d'un champ extérieur sur un dipôle

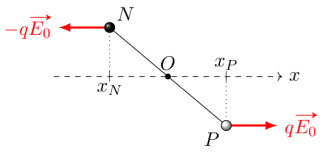
. Cas d'un champ uniforme

Application n°10 : Actions mécaniques subies par un dipôle dans un champ électrostatique extérieur uniforme

Énoncé :

Considérons un dipôle constitué de deux charges $-q$ et $+q$ placées en N et P. Ce dipôle est plongé dans un champ électrostatique extérieur uniforme $\overrightarrow{E_0}$.

Les actions mécaniques de ce champ sur le dipôle sont caractérisées par une force $\overrightarrow{F}$ et un moment $\overrightarrow{\Gamma}_O$, avec O le milieu de $[NP]$.



1. Établir l'expression de la force $\overrightarrow{F}$. Commenter.

2. Établir l'expression de $\overrightarrow{\Gamma}_O$. L'exprimer en fonction de $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{E_0}$.

3. Dans quelle(s) configuration(s) peut-on dire que le dipôle est à l'équilibre ?

Correction :

1. La force résultante exercée sur le dipôle est :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E_0} - q\overrightarrow{E_0} = \overrightarrow{0}}$$

La résultante des forces est donc nulle : le centre de masse du dipôle ne subit pas d'accélération de translation.

2. Le moment résultant par rapport à O est celui d'un couple de forces :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma}_O = \overrightarrow{ON} \wedge (-q\overrightarrow{E_0}) + \overrightarrow{OP} \wedge (q\overrightarrow{E_0}) = \overrightarrow{NP} \wedge q\overrightarrow{E_0} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E_0}}$$

3. Le dipôle est à l'équilibre lorsque le moment résultant est nul :

$$\overrightarrow{\Gamma}_O = \overrightarrow{0}.$$

On a donc $\overrightarrow{p}$ parallèle ou antiparallèle à $\overrightarrow{E_0}$.

. Cas d'un champ non uniforme

Conformément au programme, on admet que **l'expression du moment ne change pas** par rapport au cas du champ uniforme.

L'expression de la résultante des forces d'un champ extérieur non uniforme sera toujours fournie.

Bilan : Actions mécaniques et comportement d'un dipôle dans un champ électrostatique extérieur

— Dans un **champ électrostatique uniforme**, un dipôle subit une **résultante des forces nulle** et un couple dont le moment vaut :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma}_O = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}}$$

Ce moment est **indépendant du point** O choisi pour le calcul.

— L'effet principal d'un champ électrostatique extérieur, uniforme ou non, est d'**orienter le dipôle suivant les lignes de champ**.

5. Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique extérieur

L'**énergie potentielle** d'un dipôle rigide dans un champ extérieur est $\boxed{\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}}$.