

Applications de cours

→ cf. cours.

Potentiel électrostatique

□ Exercice 4.1. Potentiel créé par une sphère uniformément chargée ★

La distribution de charge est de taille finie, on peut donc considérer le potentiel nul à l'infini. Par définition et compte tenu des symétries,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{soit} \quad \frac{dV}{dr} = -E_r$$

• **Potentiel fixé à l'infini** : le potentiel est fixé pour $r > R$, c'est donc par ce domaine de l'espace qu'il faut commencer. Dans ce cas,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{donc} \quad \int_0^{V(r)} dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

ce qui donne

$$V(r > R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Pour $r < R$,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \quad \text{donc} \quad \int_{V(R)}^{V(r)} dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_R^r r dr$$

ce qui donne, grâce à la continuité du potentiel,

$$V(r) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r^2 - R^2) \quad \text{soit} \quad V(r < R) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} + \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Après factorisation, on en déduit finalement

$$V(r) = \begin{cases} \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & \text{si } r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

• **Potentiel fixé à l'origine** : dans le cas où le potentiel pris nul en $r = 0$, il faut commencer par le domaine $r < R$. Les calculs sont identiques au cas précédent, et donnent

$$\int_0^{V(r)} dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^r r dr \quad \text{soit} \quad V(r < R) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3}.$$

Pour le domaine $r > R$, on a maintenant

$$\int_{V(R)}^{V(r)} dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^r \frac{dr}{r^2} \quad \text{soit} \quad V(r) + \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

ce qui conduit à

$$V(r > R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Finalement,

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} & \text{si } r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} & \text{si } r > R \end{cases}$$

• **Conclusion** : les deux expressions ne diffèrent que d'une valeur constante $3q/8\pi\epsilon_0 R$... ce qui n'a rien d'étonnant, puisque le potentiel n'a de sens physique qu'à une constante additive près.

□ Exercice 4.2. Potentiel de Yukawa ★★

1 Par définition,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r^2} \times e^{-r/a} + \frac{1}{r} \times \frac{-1}{a} e^{-r/a} \right) \vec{u}_r$$

soit en factorisant par $e^{-r/a}/r^2$

$$\vec{E} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a} \right) \frac{e^{-r/a}}{r^2} \vec{u}_r.$$

2 Calculons la charge à partir du théorème de Gauss. Le champ ne dépendant que de r , son flux sortant d'une sphère se calcule directement :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \frac{e^{-r/a}}{r^2} \times 4\pi r^2$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Ze}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$$

Ainsi d'après le théorème de Gauss,

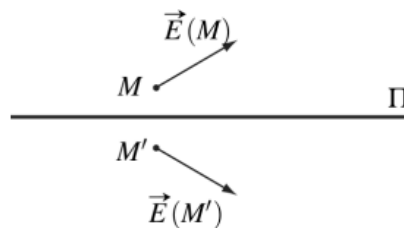
$$Q_{\text{int}}(r) = Ze \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}.$$

3 Pour $r \ll a$ on a $Q_{\text{int}} = Ze$; et pour $r \gg a$ on a $Q_{\text{int}} \rightarrow 0$. Le potentiel modélise un atome de numéro atomique Z , avec un noyau ponctuel au centre et un nuage électronique de rayon typique a .

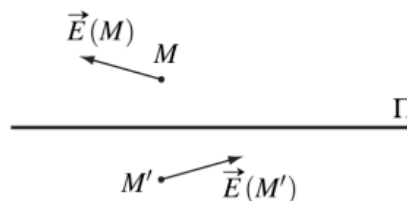
Symétrie, invariance et théorème de Gauss :

□ Exercice 4.3. Symétries du champ électrostatique 1 ★

1. Le champ électrostatique en M' est le symétrique du champ électrostatique en M :

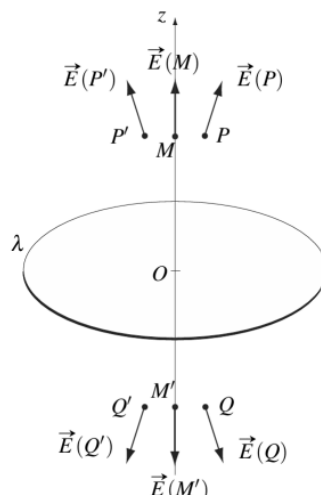


2. Le champ électrostatique en M' est l'opposé du symétrique du champ électrostatique en M :



□ Exercice 4.4. Symétries du champ électrostatique 2 ★

1. Le plan contenant l'axe (Oz) et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{MP}$ est plan de symétrie du cerceau. Le point P' est le symétrique de P par rapport à ce plan donc le champ en P' est le symétrique du champ en P . De même le champ en Q' est le symétrique du champ en Q . Le plan du cerceau est un plan de symétrie des charges. Les champs en M' , P' et Q' sont donc les symétriques des champs en M , P et Q respectivement.
2. Le plan du cerceau est plan de symétrie de la distribution de charge donc $\vec{E}(O)$ est contenu dans ce plan, il est orthogonal à $\vec{u}_z$. Par ailleurs, tout plan contenant l'axe est également plan de symétrie du cerceau donc $\vec{E}(O)$ appartient à tous ces plans, il est donc dirigé par $\vec{u}_z$. Finalement : $\vec{E}(O) = \vec{0}$.



□ Exercice 4.5. Champ électrostatique créé par une couche épaisse ★★

1 Soit M un point quelconque de l'espace.

• **Symétries de la distribution :**

- ▷ le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution, donc $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, soit $E_y(M) = 0$;
- ▷ le plan $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution, donc $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, soit $E_x(M) = 0$.

• **Invariances de la distribution :** la distribution est invariante par toute translation de vecteurs directeurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, donc $\vec{E}(M)$ ne dépend ni de x ni de y .

• **Conclusion :**

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z.$$

2 Calculons le champ $\vec{E}$ en un point M situé à l'ordonnée $z_M > 0$ par application du théorème de Gauss.

• **Surface de Gauss :** cylindre de section S et dont les deux faces planes sont situées en $z = \pm z_M$.

Le choix d'une surface de Gauss cylindrique sert à bien visualiser la surface choisie, mais n'est pas une obligation. Il suffit que la surface retenue ait bien deux portions planes en $z = \pm z_M$ pour que le raisonnement ci-dessous s'applique.

• **Calcul du flux sortant :**

$$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{haut}} E_z(z_M) \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z + \iint_{\text{lat}} E_z(z) \vec{e}_z \cdot dS \vec{n} + \iint_{\text{bas}} E_z(z = -z_M) \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z$$

Or par construction de la surface de Gauss, en tout point de la paroi latérale du cylindre, le champ électrostatique est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$. Ainsi,

$$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_z(z = z_M)S - E_z(z = -z_M)S.$$

De plus, le plan (xOy) est lui aussi plan de symétrie de la distribution, donc plan de symétrie pour le champ lui-même. Par conséquent,

$$E_z(z = -z_M) = -E_z(z = z_M)$$

et ainsi

$$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E_z(z = z_M)S.$$

• **Calcul de la charge intérieure :**

▷ si $z_M \geq a/2$ alors la surface de Gauss contient une portion de la couche chargée de surface S et de hauteur a , donc

$$Q_{\text{int}}(z_M \geq a/2) = \rho_0 Sa.$$

▷ si $z_M \leq a/2$, alors la portion de couche chargée contenue à l'intérieur de la surface de Gauss est simplement de hauteur $2z_M$, donc

$$Q_{\text{int}}(z_M \leq a/2) = 2\rho_0 S z_M.$$

• **Conclusion :** d'après le théorème de Gauss,

▷ si $z_M \geq a/2$, alors

$$2E_z(z = z_M)S = \frac{\rho_0 Sa}{\varepsilon_0}$$

▷ si $0 \leq z_M \leq a/2$, alors

$$2E_z(z = z_M)S = \frac{2\rho_0 S z_M}{\varepsilon_0}$$

▷ le cas $z_M < 0$ s'en déduit par symétrie, simplement au signe près.

Finalement, le champ $\vec{E}$ en un point M d'ordonnée z quelconque s'écrit

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \text{sgn}(z) \frac{\rho_0 z}{\varepsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } |z| \leq a/2 \\ \text{sgn}(z) \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z & \text{pour } |z| \geq a/2 \end{cases}$$

3 Le plan (xOy) est le plan $z = 0$, donc le champ y est nul d'après la question précédente. Cela se comprend par symétrie : en effet, le plan (xOy) est un plan de symétrie de la distribution, donc en tout point de ce plan $E_z = 0$. Comme on a montré précédemment qu'il s'agit de la seule composante potentiellement non nulle du champ, cela implique que le champ est forcément nul en tout point de ce plan.

4 Voir figure 1. On constate que le champ est **continu** en $z = \pm a/2$ au niveau des discontinuités de la distribution de charge.

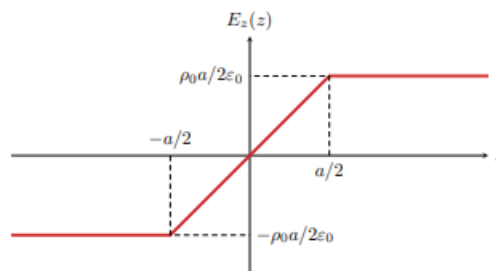


Figure 1 – Champ créé par une couche épaisse.

5 Une portion de couche chargée de surface S et de hauteur a contient une charge

$$Q = \rho_0 a S,$$

on peut donc identifier formellement une densité surfacique de charge

$$\sigma_0 = \frac{Q}{S} = \rho_0 a.$$

Comme $a \rightarrow 0$, alors le cas $|z| \leq a/2$ n'est plus pertinent dans le calcul du champ. En identifiant la densité de charge, on a donc simplement

$$\vec{E}(z) = \text{sgn}(z) \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

Sans surprise, on retrouve bien l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.

6 La distribution étant maintenant modélisée par une distribution surfacique, on retrouve une discontinuité du champ électrostatique au passage de la distribution, conforme à la relation de passage pour le champ électrostatique :

$$\vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

□ Exercice 4.6. Noyau atomique ★★

1 La charge totale contenue dans le noyau est égale à Ze , c'est-à-dire

$$Ze = \iiint_{\text{noyau}} \rho \, dV = \iiint_{\text{noyau}} \rho(r) r^2 \, dr \, \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

On peut alors séparer l'intégrale triple,

$$Ze = \rho_0 \times \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \, dr \times \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi}_{=4\pi}$$

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** La coordonnée θ des coordonnées sphériques n'est définie que entre 0 et π !!

La valeur 4π se retrouve très rapidement en raisonnant par analogie avec le volume d'une sphère de rayon R ,

$$V = \int_0^R r^2 \, dr \times \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \times 4\pi.$$

Il vient alors

$$Ze = 4\pi \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right]_0^a = 4\pi \rho_0 \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5} \right) = 4\pi \rho_0 \times \frac{2}{15} a^3$$

et finalement

$$\rho_0 = \frac{15}{8\pi} \frac{Ze}{a^3}.$$

2 On se place en un point M quelconque où l'on calcule le champ électrique, voir figure 2.

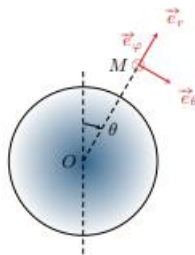


Figure 2 – Noyau modélisé par une distribution volumique de charge.

• **Invariances** : la distribution est invariante par toute rotation autour du point O , donc le champ ne dépend pas des coordonnées angulaires θ et φ .

• **Symétries** :

▷ Le plan de la figure 2 engendré par les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ est un plan de symétrie de la distribution de charges contenant M . On en déduit que $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, et donc que sa composante E_φ est nulle.

▷ De même, le plan orthogonal à la figure engendré par les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\varphi$ est un plan de symétrie de la distribution de charges. On en déduit que $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, et donc que sa composante E_θ est nulle.

On en conclut

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r.$$

• **Théorème de Gauss** : on choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O passant par M , et donc de rayon r . Le flux de $\vec{E}$ sortant de cette surface vaut

La charge intérieure pour $r < a$ s'obtient par un calcul quasiment identique à la question précédente :

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}}(r < a) &= 4\pi \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right) \\ &= \frac{15}{2} Ze \left(\frac{r^3}{3a^3} - \frac{r^5}{5a^5} \right) \end{aligned}$$

Pour $r > a$, on obtient directement

$$Q_{\text{int}}(r > a) = Ze.$$

D'après le théorème de Gauss, on conclut

▷ si $r < R$:

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{15}{2} \frac{Ze}{\varepsilon_0} \left(\frac{r^3}{3a^3} - \frac{r^5}{5a^5} \right) \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(r < a) = \frac{15 Ze}{8\pi \varepsilon_0 a^2} \left(\frac{r}{3a} - \frac{r^3}{5a^3} \right) \vec{e}_r.$$

▷ si $r \geq R$:

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(r > a) = \frac{Ze}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

3 Tracé à faire.

4 On constate que le champ obtenu pour $r > a$ est identique à celui créé par une charge ponctuelle Ze placée au centre de la sphère. Cela n'est pas surprenant car les deux distributions de charge présentent les mêmes symétries et invariances, et la charge contenue dans une sphère de rayon $r > a$ est dans les deux cas égale à la charge totale du noyau.

□ Exercice 4.7. Champ gravitationnel de la Terre ★

1. On se place en coordonnées sphériques et on cherche le champ gravitationnel en un point $M(r, \theta, \varphi)$ extérieur à la Terre. Le système est à symétrie sphérique (masse uniformément répartie) donc le champ gravitationnel ne dépend ni de θ ni de φ . Il s'écrit donc

$$\vec{G}(M) = G_r(r)\vec{u}_r + G_\theta(r)\vec{u}_\theta + G_\varphi(r)\vec{u}_\varphi$$

Tout plan contenant le point M et le centre O de la Terre est un plan de symétrie de la distribution de masse, donc contient le champ gravitationnel au point M . En conséquence, le champ n'a de composante non nulle que suivant $\vec{u}_r$:

$$\vec{G}(M) = G_r(r)\vec{u}_r$$

On applique le théorème de Gauss à une sphère Σ centrée en O et de rayon $r > R$:

$$\Phi_G = \iint_{\Sigma} \vec{G}(M) \cdot \vec{dS} = -4\pi g m,$$

avec :

$$\iint_{\Sigma} \vec{G}_r(r) \cdot \vec{dS} = G_r(r) 4\pi r^2$$

Finalement, on trouve

$$G_r(r) = -\frac{gm}{r^2},$$

puis

$$\boxed{\vec{G}(M) = -\frac{gm}{r^2}\vec{u}_r.}$$

2. L'expression à l'extérieur de la Terre est la même que si on avait considérée la Terre comme ponctuelle avec toute la masse concentrée au centre de la Terre (cf l'expression de la force de la gravitation de la Terre de masse m sur une masse m_1 en M : $\vec{F}(M) = -\frac{gm_1m}{r^2}\vec{u}_r = m_1\vec{G}(M)$.
3. À la surface de la Terre, on trouve

$$\boxed{\|\vec{G}(M)\| = \frac{gm}{R^2} \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

C'est la valeur usuellement retenue pour g .

Condensateur plan :

□ Exercice 4.8. Modélisation d'un nuage mince ★

1. Le calcul du champ créé par un plan infini a été fait dans le cours. Il vaut

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z & \text{pour } z > h \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z & \text{pour } z < h \end{cases}$$

2. On utilise le théorème de superposition. Le champ créé par le plan (chargé $-\sigma$) représentant le sol est $\vec{E}_s = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$. Le champ total est la somme des deux, soit pour $0 < z < h$:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_z.}$$

3. La relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ donne ici

$$-\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{\sigma z}{\epsilon_0},}$$

compte tenu du fait que $V(0) = 0$.

4. La différence de potentiel entre le sol et le nuage est $\Delta V = V(h) - V(0) = \frac{\sigma h}{\epsilon_0}$.
 La charge portée par une armature du condensateur est $Q = \sigma S$ où S est la surface du nuage.
 On en déduit la capacité :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{S\epsilon_0}{h} = 0,44 \mu\text{F}.$$

5. $\Delta V = V_0 = |E|h$. L'application numérique donne $V_0 = 50 \text{ MV}$.

□ Exercice 4.9. Capacité d'un câble coaxial ★★

1. Les charges des deux armatures sont opposées, donc

$$2\pi\sigma_1 R_1 l = -2\pi\sigma_2 R_2 l, \text{ soit } \sigma_1 R_1 = -\sigma_2 R_2.$$

2. **Invariances** : Le système est à symétrie cylindrique : invariant par translation le long de l'axe des cylindres et par rotation d'un angle quelconque autour de cet axe. Le champ ne dépend donc que de la distance à l'axe (notée r).

Symétries : Pour tout point M , le plan passant par M et contenant l'axe est un plan de symétrie de la distribution de charges, de même que le plan passant par M et orthogonal à l'axe. Le champ électrostatique au point M est donc contenu dans ces deux plans : il n'a de composante non nulle que suivant $\vec{u}_r$.

Finalement

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.$$

3. On applique le théorème de Gauss à une surface Σ cylindrique, coaxial du câble, de rayon $R_1 < r < R_2$ et de hauteur h . La contribution au flux ne vient que de la surface latérale puisque le champ est radial. On a donc

$$\Phi_E = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{2\pi R_1 h \sigma_1}{\epsilon_0},$$

avec :

$$\Phi_E = \iint_{\Sigma} E(r)\vec{u}_r = E(r)2\pi r h.$$

Finalement, le champ entre les deux armatures s'écrit

$$\vec{E}(M) = \frac{R_1 \sigma_1}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r.$$

4. Par définition, le potentiel V vérifie $dV = \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{OM} = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}$.
 En coordonnées cylindriques, $d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$,
 d'où $dV = -E(r) \cdot dr$,
 soit :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{r=R_1}^{r=R_2} E(r) dr = \frac{R_1 \sigma_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

5. On applique la définition donnée pour une longueur l de câble :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi l \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

La capacité linéique est donc donnée par

$$C_l = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \simeq 60 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}.$$

□ Exercice 4.10. Capteur capacitif de niveau de liquide ★★★

1 Le système est invariant par toute rotation autour de l'axe des cylindres, donc V est indépendant de θ . Par ailleurs, les effets de bords sont négligés, ce qui revient à supposer une invariance par translation le long de l'axe des cylindres : V ne dépend donc pas non plus de z . Finalement, V ne dépend que de r .

2 L'espace entre les deux cylindres est vide de charge. L'équation de Poisson s'écrit donc

$$\Delta V = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

⚠⚠⚠ **Attention !** Pour résoudre une telle équation, il ne faut surtout pas chercher à développer la dérivée en espérant aboutir à une forme canonique connue : ça ne marche pas ! Il faut au contraire procéder par deux intégrations successives.

Par une première intégration, on obtient

$$r \frac{dV}{dr} = k \quad \text{avec} \quad k = \text{cte.}$$

On en déduit par une seconde intégration

$$\frac{dV}{dr} = \frac{k}{r} \quad \text{d'où} \quad V = k \ln r + k' \quad \text{avec} \quad k' = \text{cte.}$$

Les deux constantes k et k' se déterminent avec les conditions aux limites,

$$\begin{cases} V(r=a) \underset{\text{CL}}{=} V_0 \underset{\text{expr}}{=} k \ln a + k' \\ V(r=b) \underset{\text{CL}}{=} 0 \underset{\text{expr}}{=} k \ln b + k' \end{cases}$$

Par soustraction,

$$V_0 = k \ln a - k \ln b \quad \text{soit} \quad V_0 = k \ln \frac{a}{b} \quad \text{donc} \quad k = \frac{V_0}{\ln(a/b)}.$$

En réinjectant dans la condition limite en $r = b$, il vient

$$k' = -k \ln b = -\frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln b.$$

Finalement,

$$V(r) = \frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln r - \frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln b = \frac{V_0}{\ln(a/b)} (\ln r - \ln b) \quad \text{d'où} \quad \boxed{V(r) = \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} V_0.}$$

3 Le champ électrique entre les deux cylindres vaut

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\frac{k}{r} \vec{e}_r \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{V_0}{r \ln(a/b)} \vec{e}_r.}$$

Évitez de multiplier les calculs inutiles : rien ne sert de dériver l'expression finale du potentielle, puisque sa dérivée a déjà été déterminée dans la première étape d'intégration.

Test de vraisemblance : le champ est bien dirigé dans le sens des potentiels décroissants, c'est-à-dire selon $+\vec{e}_r$, car $\ln(a/b) < 0$.

4 Plaçons l'origine $z = 0$ au fond de la cuve. L'énergie électrostatique stockée dans la partie de la sonde immergée dans le liquide vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{liq}} &= \iiint \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{V_0}{r \ln(a/b)} \right)^2 \right] r dr d\theta dz \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{V_0^2}{\ln^2(a/b)} \times \int_a^b \frac{dr}{r} \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^h dz \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{V_0^2}{\ln^2(a/b)} \times \ln \frac{b}{a} \times 2\pi h \\ \mathcal{E}_{\text{liq}} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\pi h}{\ln(b/a)} V_0^2 \end{aligned}$$

en utilisant $\ln^2(a/b) = \ln^2(b/a)$ pour simplifier. On déduit par un calcul analogue l'énergie électrostatique stockée par la partie non immergée,

$$\mathcal{E}_{\text{air}} = \varepsilon_0 \frac{\pi(H-h)}{\ln(b/a)} V_0^2.$$

L'énergie totale stockée dans la sonde est donc la somme,

$$\mathcal{E} = \varepsilon_0 \frac{\pi}{\ln(b/a)} [(H-h) + \varepsilon_r h] V_0^2 = \varepsilon_0 \frac{\pi}{\ln(b/a)} [H + (\varepsilon_r - 1)h] V_0^2.$$

5 La tension imposée aux bornes du condensateur est simplement $V_0 - 0 = V_0$. Par définition de la capacité,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad \text{d'où} \quad C = 2\varepsilon_0 \frac{\pi}{\ln(b/a)} [H + (\varepsilon_r - 1)h].$$

Dipôle électrostatique :

□ Exercice 4.11. Dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur non uniforme ★★

1.

La charge q crée le champ électrostatique

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Le dipôle subit un moment

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}.$$

Il sera en équilibre par rapport aux mouvements de rotation si ce moment est nul, donc si $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires.

Le dipôle s'oriente selon les lignes de champ, c'est-à-dire radialement par rapport à la charge.

L'équilibre est stable si les deux vecteurs sont de même sens, donc

$$\vec{p} = p \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad p > 0.$$

2.

D'après la formule fournie,

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \text{grad}\left(\frac{pq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = -\frac{2pq}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{u}_r$$

Une fois que le dipôle est aligné sur le champ électrostatique de la charge ponctuelle, il est attiré par celle-ci.

3.

Le dipôle électrostatique situé en M crée en O le champ électrostatique

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{MO})\vec{MO} - OM^2 \vec{p}}{OM^5}.$$

Or

$$\vec{MO} = -r \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{p} = p \vec{u}_r.$$

Donc

$$\vec{p} \cdot \vec{MO} = -pr.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(-pr)(-r \vec{u}_r) - r^2 p \vec{u}_r}{r^5} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2p}{r^3} \vec{u}_r. \end{aligned}$$

La charge q subit donc la force

$$\vec{F}' = q \vec{E}' = \frac{2pq}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{u}_r$$

Elle est attirée par le dipôle.

On a donc

$$\vec{F}' = -\vec{F}$$

La troisième loi de Newton, ou principe des actions réciproques, est donc respectée.

□ Exercice 4.12. Interaction entre deux dipôles électrostatiques ★★

1. L'énergie mutuelle d'interaction des dipôles $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ peut s'exprimer comme

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2} \left(\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2(O_1) + \vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(O_2) \right) = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2(O_1) = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(O_2)$$

On utilise l'expression intrinsèque du champ créé par un dipôle

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 OM^3} \left(3(\vec{p} \cdot \vec{OM})\vec{OM} - OM^2 \vec{p} \right),$$

ce qui donne

$$\mathcal{E}_p = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \left(3 \left(\vec{p}_2 \cdot \vec{O_2 O_1} \right) \left(\vec{p}_1 \cdot \vec{O_2 O_1} \right) - d^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \right).$$

Tous calculs faits, on obtient

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^3} (\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2).$$

On reconnaît la fonction dont le graphe est donné dans l'énoncé.

2. a) $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. $\mathcal{E}_p$ est un extremum local en ce point, on voit sur le graphe qu'il s'agit d'un col. Cette position est globalement instable.
 b) $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_2 = 0$. $\mathcal{E}_p$ n'est pas extrémale. Cette position n'est pas une position d'équilibre.
 c) $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Même conclusion que le cas a).
 d) $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 0$. $\mathcal{E}_p$ possède un minimum absolu en ce point, c'est une position d'équilibre stable.
 e) $\theta_1 = \pi$ et $\theta_2 = 0$. $\mathcal{E}_p$ possède un maximum absolu en ce point, c'est une position d'équilibre instable.
 f) $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$. $\mathcal{E}_p$ n'est pas extrémale en ce point. Cette position n'est pas une position d'équilibre.