

DM - Physique : n°1

Exercice 1: Dans un repère cylindrique

Q1 $E(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$

Symétrie:

$\Pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un Π^1
 $\Pi_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un Π^1

$E \in \Pi^1$ et Π^2

$$E(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r$$

Invariance:

Rotation en θ et translation en z

alors

$$\boxed{E(M) = E_r(r) \vec{e}_r}$$

Q2

Surface de Gauss: Notre pénétré (cylindre)

Calcul du flux:

$$\oint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{sup}}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{inf}}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{lat}}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow d\vec{S}_{\text{sup}} &= dS_{\text{sup}} \vec{e}_y \perp \vec{E}_n \\ \Rightarrow \oint_{\text{sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{sup}} &= 0 \end{aligned}$$

Idem pour $d\vec{S}_{\text{inf}}$

$$\oint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{slat}} E_n(r) dS_{\text{slat}}$$

$$\oint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = E_n(r) \oint dS_{\text{slat}} = E_n(r) \times 2\pi r H$$

Calcul de Q_{int} :

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \int \pi r^2 \rho_0 & \text{si } r < R \\ \pi R^2 \rho_0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

la surface de Gauss englobe la charge Q +
alors $Q_{\text{int}} = Q$

et donc d'après la th de Gauss on a :

$$E_n(r) \times 2\pi r = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r H}$$

Q3

$$C_0 = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Q4

$$\underline{E = -\text{grad } V}$$

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}$$

$$V_1 - V_2 = V(a_1) - V(a_2) = \int_{a_1}^{a_2} E(r) dr$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \left[\ln r \right]_{a_1}^{a_2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

$$C_0 = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad Q3$$

$$\text{alors } C_0 = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

Q5

la partie inf h contient de l'eau
la partie sup $H-h$ contient de l'air
Alors $V = V_1 - V_2$

$$\text{d'où } Q_{\text{tot}} = Q_{\text{eau}} + Q_{\text{air}}$$

$$C = \frac{Q_{\text{tot}}}{V} = \frac{Q_{\text{can}}}{V} + \frac{Q_{\text{air}}}{V}$$

Also $C = C_{\text{can}} + C_{\text{air}}$

Q6

$$C_{\text{can}} = \frac{2\pi\epsilon r}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

$$C_{\text{air}} = \frac{2\pi\epsilon_0(H-r)}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

$$C(r) = C_{\text{can}} + C_{\text{air}}$$

$$\Rightarrow = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)} [\epsilon r + \epsilon_0(H-r)]$$

$$= \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)} [(\epsilon - \epsilon_0)r + \epsilon_0 H]$$

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)} \quad (\text{Q4})$$

also $\frac{2\pi}{\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)} = \frac{C_0}{\epsilon_0 H}$

$$C(r) = \frac{C_0}{\epsilon_0 H} [(\epsilon - \epsilon_0)r + \epsilon_0 H] = C_0 \left[\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon_0 H} r + 1 \right]$$

$$\boxed{A = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0 H} = \frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{H} = \frac{1}{H} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right)} \text{ et } \boxed{B = 1}$$

$$\text{alors } \boxed{c(h) = c_0 (A\lambda + B)}$$