

EM2 - Magnétostatique

Table des matières

Introduction	1
I. Courants électriques	2
1. Courants volumiques	2
2. Courants surfaciques	3
II. Théorème d'Ampère	3
1. Symétries d'une distribution de courant et conséquences sur $\vec{B}$	4
2. Invariances d'une distribution de courant et conséquences sur $\vec{B}$	6
3. Application du théorème d'Ampère	6
III. Propriétés des lignes de champ	11
1. Ordre de grandeur de champ magnétique	11
2. Lignes de champ	11
IV. Le dipôle magnétostatique	12
1. Moment magnétique	12
2. Cas macroscopique : Moment magnétique d'un matériau magnétique	12
3. Cas microscopique : moment magnétique de l'atome d'hydrogène	12
4. Champ magnétique créé par un dipôle magnétique	14
5. Ordre de grandeur de moment magnétique	16
6. Action d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle magnétique	16

Introduction

Pourquoi les trains à lévitation flottent-ils ? Comment une IRM peut-elle « voir » à travers le corps ?

Ces phénomènes reposent tous sur un même concept : le **champ magnétostatique** créé par des courants.



Le train à sustentation magnétique japonais.

I. Courants électriques

1. Courants volumiques



On rappelle que la charge contenue dans un volume élémentaire $d\tau$ s'exprime :

$$\delta q = \rho d\tau.$$

Supposons une distribution volumique de charges de densité ρ en déplacement à la vitesse moyenne $\vec{v}$ et intéressons-nous à la charge δq qui traverse une surface élémentaire orientée $d\vec{S}$ pendant un temps dt .

Les particules chargées qui traversent la surface pendant cette durée dt sont contenues dans le volume élémentaire : $d\tau = \vec{v} dt \cdot d\vec{S}$.

En substituant l'expression de $d\tau$ dans δq , il vient : $\delta q = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$.

On définit alors le **vecteur densité de courant volumique** $\vec{j}$ comme la charge δq qui traverse la surface $d\vec{S}$ pendant le temps dt :

$$\delta q = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt.$$

Par identification, on obtient l'expression de $\vec{j}$ (en $A \cdot m^{-2}$) : $\boxed{\vec{j} = \rho \vec{v}}$

Remarque : S'il y a plusieurs types de charge mobiles (exemple, ions en solution aqueuse), on a : $\vec{j}_{\text{tot}} = \sum_k \rho_k \vec{v}_k$.

De la même façon, on définit **l'intensité** i (en A) à travers la surface S comme la charge δQ qui traverse S par unité de temps dt :

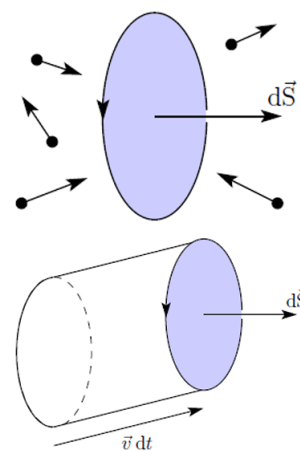
$$\boxed{i = \frac{\delta Q}{dt}}, \text{ avec } \delta Q = \iint_S \delta q.$$

On en déduit le lien entre l'intensité i et le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$:

$$\boxed{i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Remarques :

- Le **courant électrique** i traversant la surface S est le **flux de la densité volumique de courant** $\vec{j}$.
- En supposant $\vec{j}$ **uniforme** sur la section d'un fil, on a $i = j \times S \iff j = \frac{i}{S}$
- Une densité volumique de charges mobiles génère une densité volumique de courant. Il est cependant possible d'avoir une densité volumique de courant non nulle avec une densité volumique de charge moyenne nulle (cas des plasmas, voir chapitre correspondant).



Application n°1 : Autour de la densité de courant volumique

Énoncé :

Considérons un fil de cuivre de section cylindrique $S = 1 \text{ mm}^2$, parcouru par un courant permanent d'intensité $I = 1 \text{ A}$. La densité de courant volumique dans le conducteur est donnée par :

$$\vec{j} = \alpha r^2 \vec{e}_z.$$

1) Déterminer l'expression de α en fonction de I et du rayon R .

2) Calculer la vitesse d'ensemble des électrons. (La densité volumique d'électrons libres dans le cuivre est de l'ordre de 10^{29} m^{-3}).

Correction :

1) L'intensité du courant traversant une surface orientée est donnée par le flux de la densité de courant à travers cette surface :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Choisissons comme surface S une section du conducteur, orientée selon $\vec{e}_z$. En coordonnées cylindriques :

$$d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e}_z.$$

On obtient alors :

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \alpha r^2 r dr d\theta = \alpha \left(\int_0^R r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right).$$

Ainsi :

$$I = \alpha \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{\alpha \pi R^4}{2}.$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{2I}{\pi R^4}$$

2)

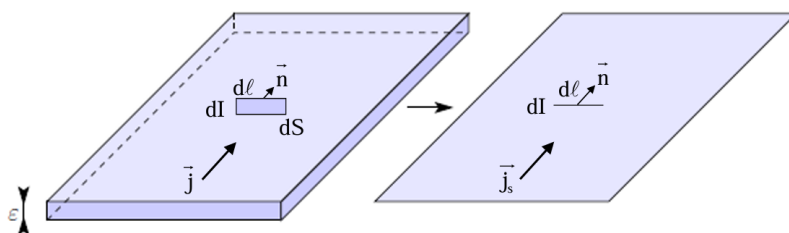
$$\|\vec{j}\| = nev = \frac{I}{S} \text{ d'où } v = \frac{I}{neS}$$

$$\text{Numériquement } v = \frac{1}{10^{29} \times 10^{-19} \times 10^{-6}} \simeq 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. Courants surfaciques

. Courants surfaciques

Dans certaines situations, les courants sont confinés dans un domaine de l'espace possédant une épaisseur ε très faible par rapport aux autres dimensions caractéristiques :



On modélise ces distributions par une **densité surfacique de courant** $\vec{j}_s$ ($\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$), tel que le courant $\delta I = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ traversant la surface $dS = \varepsilon \times dl$ s'écrive :

$$\delta I = \vec{j}_s \cdot d\vec{\ell}$$

On a donc :

$$\vec{j}_s = \varepsilon \vec{j}.$$

II. Théorème d'Ampère

De manière similaire au théorème de Gauss vu en électrostatique, il existe un théorème qui permet de calculer le champ magnétique créé par une distribution de courant, pour peu que celle-ci présente des symétries et des invariances en nombre suffisant. Là encore, le Principe de Curie relie les symétries des sources aux symétries du champ.

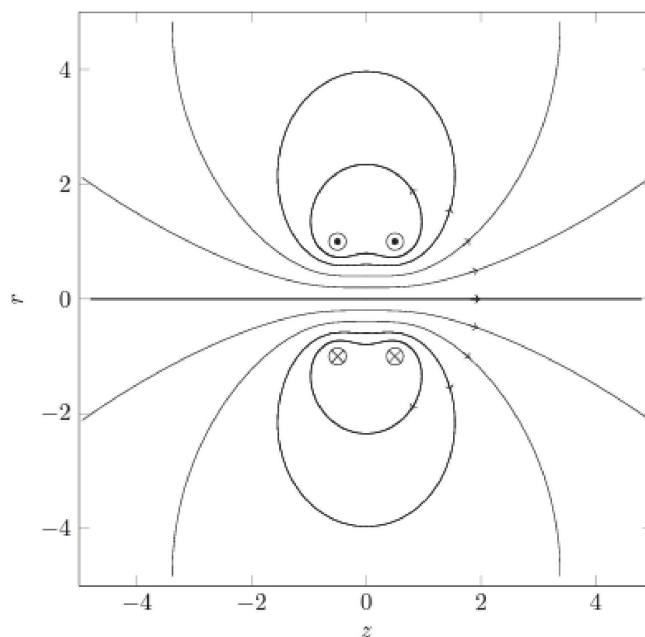
1. Symétries d'une distribution de courant et conséquences sur $\vec{B}$

- Une distribution de courant admet un plan de symétrie Π_S , si la distribution de courant obtenue par symétrie par rapport au plan Π_S lui est identique.
- Une distribution de courant admet un plan d'antisymétrie Π_A , si la distribution de courant obtenue par symétrie par rapport au plan Π_A lui est en tout point opposée (direction identique, sens opposé).

Application n°2 : Plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courant

Énoncé :

On considère la distribution de courant représentée ci-dessous.



1. Déterminer les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de courant.
2. Choisissez deux points M et M' symétriques par rapport à un plan d'antisymétrie Π_A de la distribution de courant. Représenter les champs magnétiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ en M et M' . Que pouvez-vous en dire ?
3. En déduire la direction du champ magnétique en un point M appartenant au plan d'antisymétrie Π_A .
4. Choisissez deux points M et M' symétriques par rapport à un plan de symétrie Π_S de la distribution de courant. Représenter les champs magnétiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ en M et M' . Que pouvez-vous en dire ?
5. En déduire la direction du champ magnétique en un point M appartenant au plan de symétrie Π_S .

Correction :

1. La distribution de courant possède :

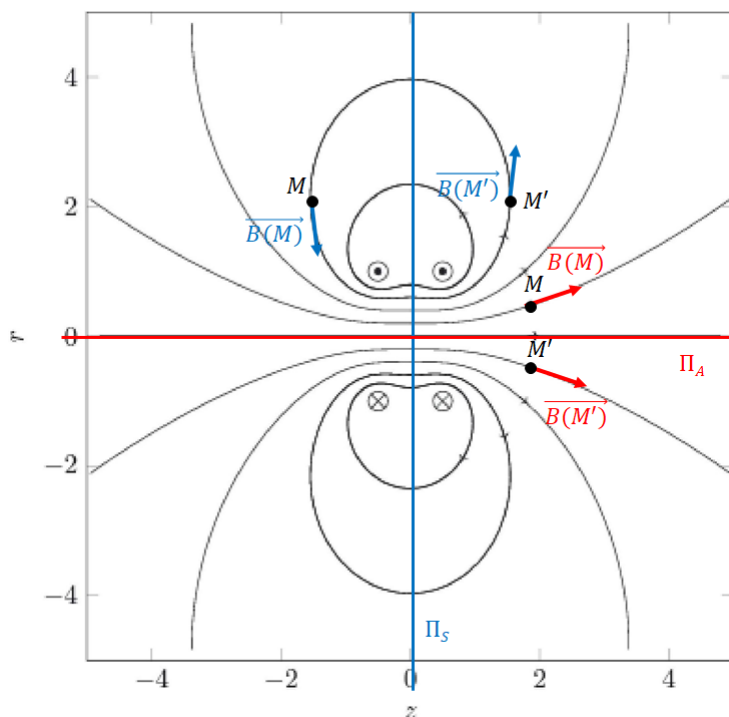
— un **plan de symétrie** :

$$z = 0$$

— deux **plans d'antisymétrie** :

$$r = 0 \quad \text{et} \quad \text{le plan de la figure.}$$

2. Soient M et M' deux points symétriques par rapport au plan d'antisymétrie Π_A . Les champs magnétiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ sont symétriques par rapport à Π_A .
3. Lorsque M appartient au plan d'antisymétrie Π_A , son symétrique M' est confondu avec M . Le champ magnétique est alors contenu dans le plan Π_A .
4. Soient M et M' deux points symétriques par rapport au plan de symétrie Π_S . Les champs magnétiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ sont antisymétriques par rapport à Π_S .
5. Lorsque M appartient au plan de symétrie Π_S , son symétrique M' est confondu avec M . Le champ magnétique est alors orthogonal au plan Π_S .

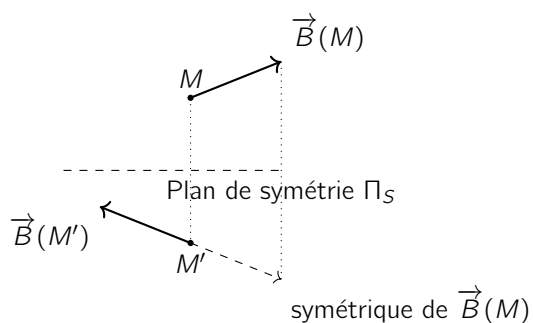


Bilan : Conséquences des symétries de la distribution de courant sur le champ magnétique

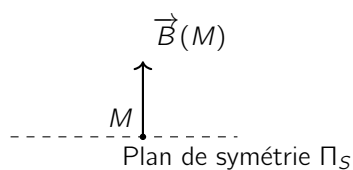
Plan de symétrie Π_S

Soient M et M' deux points symétriques par rapport à un plan de symétrie Π_S de la distribution de courant.

Les champs magnétiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ sont **opposés et symétriques** par rapport à Π_S .



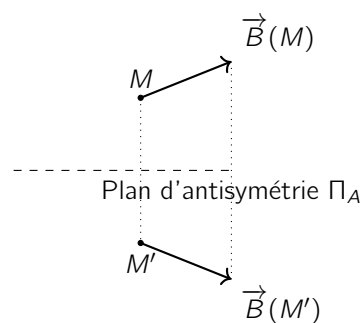
En un point M appartenant au plan de symétrie, le champ magnétique est **orthogonal** à ce plan.



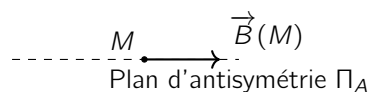
Plan d'antisymétrie Π_A

Soient M et M' deux points symétriques par rapport à un plan d'antisymétrie Π_A de la distribution de courant.

Les champs magnétiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ sont **symétriques** par rapport à Π_A .



En un point M appartenant au plan d'antisymétrie, le champ magnétique est **contenu dans** ce plan.



2. Invariances d'une distribution de courant et conséquences sur $\vec{B}$

- Une distribution de courant est invariante par toute translation d'axe (Ox) ssi, vue des points $P_1(x_1, y, z)$ et $P_2(x_2, y, z)$, quelques soient x_1 et x_2 , la distribution de courant est la même.
- Une distribution de courant est invariante par toute rotation d'angle θ d'axe (Oz) ssi, vue des points $P_1(r, \theta_1, z)$ et $P_2(r, \theta_2, z)$, quelques soient les angles θ_1 et θ_2 , la distribution de courant est la même.

Bilan : Invariances d'une distribution de courant

Invariance par translation :

Si une distribution de courant est invariante par translation le long d'un axe, alors les composantes du champ magnétique $\vec{B}(M)$ ne dépendent pas de la coordonnée du point M selon cet axe.

Invariance par rotation :

Si une distribution de courant est invariante par rotation autour d'un axe, alors les composantes du champ magnétique $\vec{B}(M)$ ne dépendent pas de la coordonnée angulaire θ du point M autour de cet axe.

3. Application du théorème d'Ampère

Ce théorème, très général, n'est utile que lorsque les symétries et les invariances simplifient grandement les calculs.

Énoncé : La circulation du champ magnétique, le long de n'importe quel contour fermé et orienté, est reliée au courant traversant la surface délimitée par le contour.

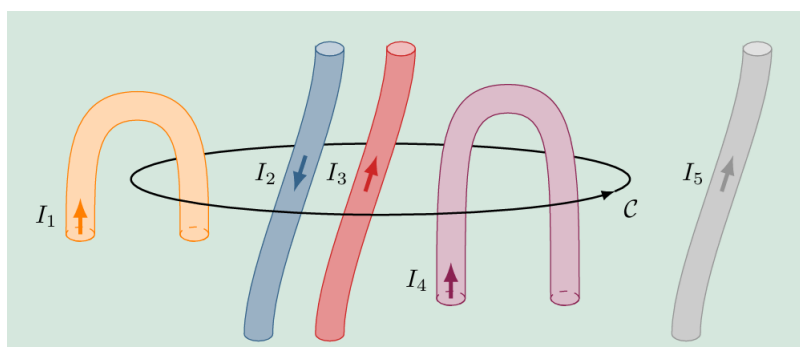
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlace}}$$

- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ la **perméabilité du vide**.
- I_{enlace} la somme des courants (volumiques, surfaciques et linéiques) traversant la surface à l'intérieur de C , comptés positivement dans le sens donné par la **règle de la main droite** à partir du sens de parcours de C .

Application n°3 : Courant enlacé par un contour orienté

Énoncé :

Quel est le courant enlacé I_{int} par le contour C ci-dessous ?



Correction :

En tenant compte de l'orientation du contour C , les courants I_1 , I_2 , I_3 et I_4 sont comptés avec leur signe selon leur orientation par rapport au contour.

$$I_{\text{int}} = -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_4$$

Les contributions $+I_4$ et $-I_4$ se compensent. On obtient donc :

$$I_{\text{int}} = -I_1 - I_2 + I_3$$

Méthode : Appliquer le théorème d'Ampère

1. Choisir un système de coordonnées adapté à la distribution de courant.
2. Étudier les symétries et les invariances de la distribution de courant. En déduire la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ ainsi que les coordonnées dont il peut dépendre.
3. Choisir judicieusement un contour fermé tel que le champ magnétique ait, le long du contour, une norme constante et une direction constante par rapport à $d\vec{\ell}$.

On cherche à pouvoir sortir B de l'intégrale. Certaines portions du contour peuvent également donner une contribution nulle lorsque $\vec{B} \perp d\vec{\ell}$.

4. Calculer la circulation du champ magnétique sur le contour choisi, puis appliquer le théorème d'Ampère.

. Fil rectiligne infini

Application n°4 : Expression du champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infini

Énoncé :

On considère un fil rectiligne infini de rayon R , parcouru par une densité de courant uniforme : $\vec{j} = j \vec{e}_z$.

Le courant total traversant une section du fil est $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \pi R^2 j$.

En utilisant la méthode associée au théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace.

Correction :

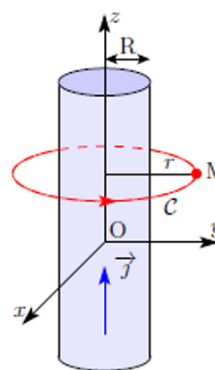
Choix du système de coordonnées : coordonnées cylindriques, avec l'axe (Oz) confondu avec l'axe du fil.

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

Symétries : tout plan contenant l'axe (Oz) et le point M est un plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique est donc orthogonal à ce plan. Il est ainsi dirigé selon $\vec{e}_\theta$:

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta.$$

Contour d'ampère dans un fil rectiligne infini



Invariances : la distribution de courant est invariante par translation selon l'axe (Oz) et par rotation autour de cet axe. Le champ magnétique ne dépend donc ni de z ni de θ :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$$

Choix du contour d'Ampère : on choisit un cercle $\mathcal{C}$ d'axe (Oz) , de rayon r , passant par M . Le contour est orienté selon la règle de la main droite par rapport au courant I .

Calcul de la circulation :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} B_\theta(r) \vec{e}_\theta \cdot (r d\theta \vec{e}_\theta).$$

Sur le contour d'Ampère, r est constant et $B_\theta(r)$ est donc constant. Ainsi :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_\theta(r) r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B_\theta(r).$$

Courant enlacé : Le courant enlacé dépend de la position du contour d'Ampère.

Si $r > R$, le contour englobe tout le courant :

$$I_{\text{int}} = I.$$

Si $r < R$, seule une partie de la section du fil est englobée. Comme la densité de courant est uniforme,

$$I_{\text{int}} = j\pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{I r^2}{R^2}.$$

Application du théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}.$$

On obtient donc :

$$2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I_{\text{int}}.$$

Finalement,

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{e}_\theta & \text{si } r < R, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } r > R. \end{cases}$$

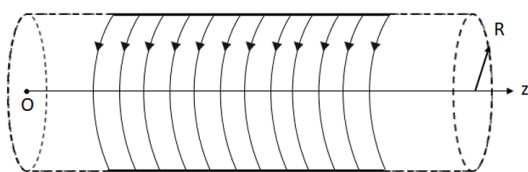
Le champ est donc proportionnel à r à l'intérieur du conducteur et décroît en $1/r$ à l'extérieur.

. Solénoïde infini

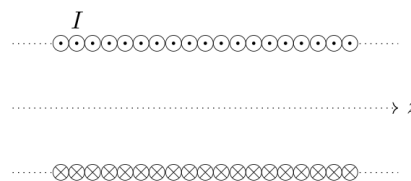
Application n°5 : Expression du champ magnétostatique créé par un solénoïde infini

Énoncé :

On considère un solénoïde infini, c'est-à-dire une bobine suffisamment longue pour que l'on puisse négliger les effets de bord. La bobine est constituée de n spires par unité de longueur, chacune parcourue par un courant d'intensité I . Les spires sont jointives et orthogonales à l'axe (Oz) de la bobine. Conformément au programme, on admet que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.



Solénoïde infini vu en perspective.



Solénoïde infini vu en coupe.

1. Réaliser l'étude des invariances et des symétries de $\vec{B}(M)$.
2. En appliquant le théorème d'Ampère à un contour situé à l'intérieur du solénoïde, montrer que le champ magnétique y est uniforme.
3. Choisir un contour d'Ampère à cheval sur l'intérieur et l'extérieur du solénoïde et déterminer l'expression du champ magnétique à l'intérieur.

Correction :

1. Choix du système de coordonnées : On se place en coordonnées cylindriques, avec l'axe (Oz) confondu avec l'axe du solénoïde :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

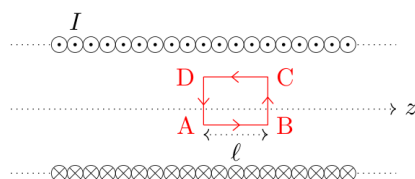
Symétries : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique est donc orthogonal à ce plan. Il est ainsi dirigé selon $\vec{e}_z$:

$$\vec{B}(M) = B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

Invariances : la distribution de courant est invariante par translation selon l'axe (Oz) et par rotation autour de cet axe. Le champ magnétique ne dépend donc ni de z ni de θ :

$$\vec{B}(M) = B_z(r) \vec{e}_z$$

2. On choisit le contour d'Ampère rectangulaire $ABCD$, entièrement situé à l'intérieur du solénoïde, représenté ci-dessous.



Contour d'Ampère à l'intérieur du solénoïde.

Le contour n'enlace aucun courant. Le théorème d'Ampère donne donc :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Les segments BC et DA ne contribuent pas à la circulation car $\vec{B} \perp d\vec{\ell}$.

Sur les segments AB et CD , le champ est parallèle à $d\vec{\ell}$. La circulation s'écrit donc :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \ell B_z(A) - \ell B_z(C).$$

Ainsi :

$$\ell [B_z(A) - B_z(C)] = 0.$$

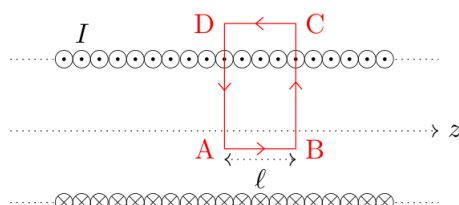
On en déduit :

$$B_z(A) = B_z(C).$$

Les points A et C étant quelconques à l'intérieur du solénoïde, le champ magnétique y est uniforme :

$$\vec{B}_{\text{int}} = B_{\text{int}} \vec{e}_z$$

3. Circulation du champ magnétique : On choisit maintenant un contour d'Ampère rectangulaire $ABCD$ à cheval sur l'intérieur et l'extérieur du solénoïde, comme représenté ci-dessous.



Contour d'Ampère à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

Notons B_{int} et B_{ext} les normes des champs magnétiques respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

Les segments BC et DA ne contribuent pas à la circulation car $\vec{B} \perp d\vec{\ell}$.

Sur le segment AB , le champ est uniforme et vaut B_{int} . Sur le segment CD , le champ est nul par hypothèse :

$$B_{\text{ext}} = 0.$$

La circulation du champ magnétique vaut donc :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_{\text{int}}\ell - B_{\text{ext}}\ell = \ell B_{\text{int}}.$$

Courant enlacé : Le contour $ABCD$ enlace N spires sur une longueur ℓ . Chaque spire étant parcourue par le courant I , le courant enlacé vaut :

$$I_{\text{int}} = NI.$$

Application du théorème d'Ampère :

$$\ell B_{\text{int}} = \mu_0 NI.$$

Le nombre de spires par unité de longueur est :

$$n = \frac{N}{\ell}.$$

On obtient finalement :

$$B_{\text{int}} = \mu_0 nI.$$

Ainsi, à l'intérieur du solénoïde :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 nI \vec{e}_z$$

et, conformément à l'hypothèse de l'énoncé, à l'extérieur :

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Finalement :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \mu_0 nI \vec{e}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde,} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur.} \end{cases}$$

Bilan : Champs magnétostatiques classiques

Fil rectiligne infini

À l'extérieur du fil, pour $r > R$:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

où r est la distance du point M à l'axe du fil.

Solénoïde infini

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \mu_0 nI \vec{e}_z & \text{à l'intérieur,} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur.} \end{cases}$$

où n est le nombre de spires par unité de longueur.

III. Propriétés des lignes de champ magnétique

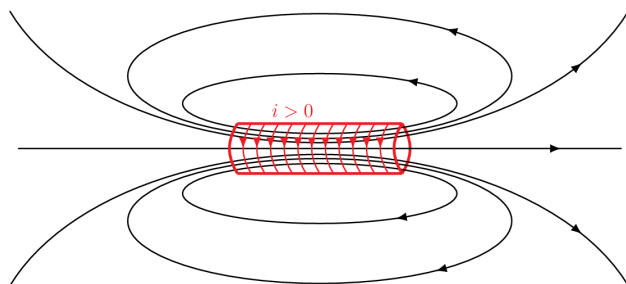
1. Ordre de grandeur de champ magnétique

Système	Champ magnétique créé (T)
Champ magnétique terrestre	$\sim 45 \mu\text{T}$
Surface d'un aimant commercial	0,1 – 1
Appareil d'IRM	2 – 7
Aimant le plus puissant	45,5
Naine blanche / étoile à neutrons	$10^4/10^8$

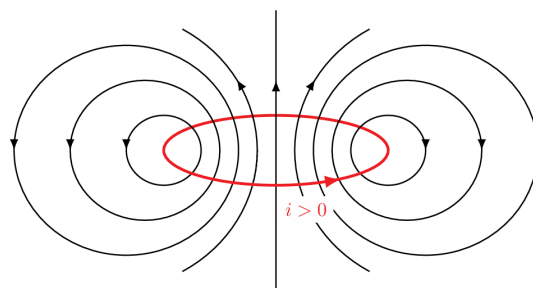
2. Lignes de champ

. Propriétés des lignes de champ magnétique

- Les lignes de champs sont dirigées du pôle Nord vers le pôle Sud des aimants.
- Si les lignes de champ sont parallèles entre elles et régulièrement espacées alors le champ est uniforme.
- Les lignes de champ sont toujours des courbes fermées (dans un aimant, les lignes de champ se bouclent à l'intérieur de l'aimant).
- Les boucles de champ enroulent les courants électriques en respectant la règle de la main droite.
- Lorsque les lignes de champ se resserrent, la norme de B augmente. Les zones où le champ est le plus intense se trouvent au voisinage de la source du champ magnétique.



Carte de champ magnétique créé par un solénoïde.



Carte de champ magnétique créé par une boucle de courant.

. Flux du champ magnétique

L'absence de charges magnétiques a un certain nombre de conséquences sur la structure du champ magnétique :

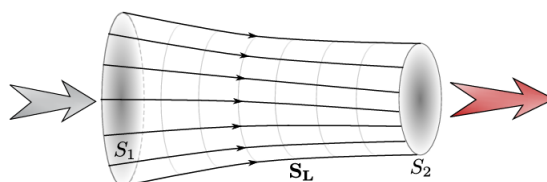
Le champ magnétostatique est un champ à flux conservatif (admis dans ce chapitre), c'est-à-dire que son flux à travers toute surface fermée $\mathcal{S}$ est nul :

$$\Phi_B = \oint_{M \in \mathcal{S}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0$$

Pour comprendre le lien entre resserrement des lignes de champ et norme de B , prenons une surface construite sur **un tube de champ**. Par définition de celui-ci, le champ est parallèle à la surface latérale et donc le flux latéral est nul.

D'après la conservation du flux du champ magnétique sur une surface fermée, le flux entrant dans le tube est égal au flux sortant.

Si les lignes de champ se resserrent, la surface d'entrée devient plus grande que la surface de sortie. Nécessairement, le champ en sortie doit augmenter pour compenser la diminution de la surface. On retrouve donc que la valeur du champ augmente lorsque les lignes de champ se resserrent.



IV. Le dipôle magnétostatique

1. Moment magnétique

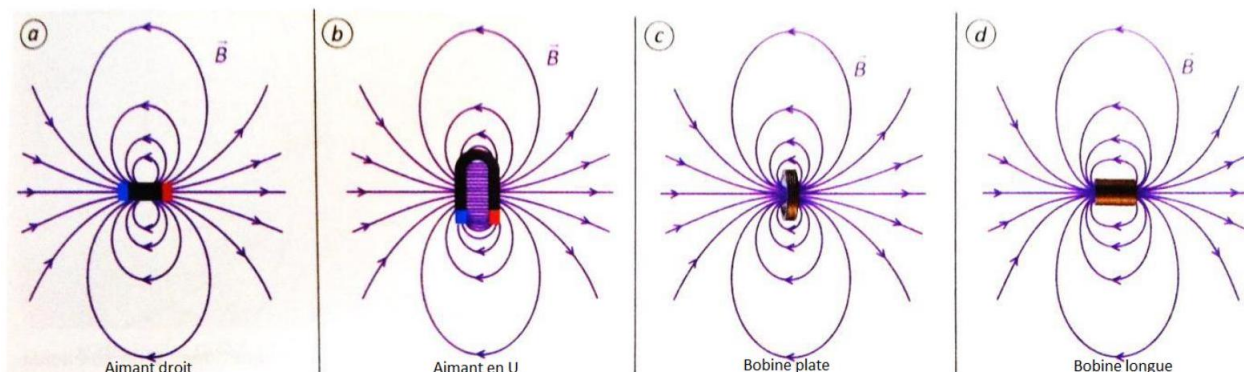


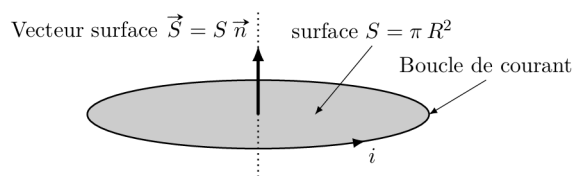
Figure 1 – Quelques lignes de champ.

À une distance d'observation grande devant la taille de la source du champ magnétique, on remarque que les cartes de champ d'un aimant droit, d'un aimant en U, d'une spire circulaire ou d'un solénoïde sont similaires.

Ces dispositifs peuvent être décrits de façon unifiée par un modèle : le **dipôle magnétique** caractérisé par son **moment magnétique** $\vec{m}$.

Dans le cas d'une boucle de courant plane de surface orientée $\vec{S}$ et parcourue par un courant i , le moment magnétique s'exprime :

$$\vec{m} = i \vec{S}$$



2. Cas macroscopique : moment magnétique d'un matériau magnétique

Dans un aimant, il n'est pas facile de mettre en évidence des boucles de courant. En effet, les propriétés magnétiques de la matière sont d'origine quantique mais en première approche, elles peuvent être associées à des boucles de courant microscopiques résultant du déplacement des électrons autour des atomes. Chaque boucle de courant microscopique crée un moment magnétique $\vec{m}_i$ et le moment magnétique total est $\vec{m} = \sum_i \vec{m}_i$.

Dans la majorité des matériaux les $\vec{m}_i$ s'annulent deux à deux mais pour certains matériaux magnétiques, ce n'est pas le cas et un moment magnétique non nul persiste donnant naissance à un champ magnétique rémanent.

Ainsi, on caractérise un matériau magnétique par son moment magnétique macroscopique $\vec{m}$. Dans le cas des aimants, il est constant. (Un ordre de grandeur sera établi plus bas à partir de l'expression du champ magnétique créé par un dipôle magnétique.)

3. Cas microscopique : moment magnétique de l'atome d'hydrogène

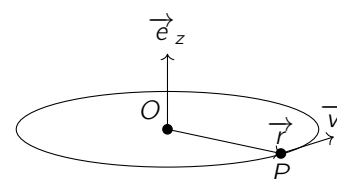
. Le modèle de Bohr

Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène suppose que l'électron de l'atome d'hydrogène décrit une trajectoire circulaire uniforme classique sur laquelle il ne rayonne pas de champ électromagnétique.

Ce postulat mécanique traduit la quantification de la norme L_n du moment cinétique de l'électron par rapport au noyau :

$$L_n = n\hbar$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.



Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.

. **Moment magnétique microscopique****Application n°6 : Ordre de grandeur du moment magnétique dans le domaine microscopique****Énoncé :**

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron décrit une trajectoire circulaire uniforme de rayon r autour du noyau O .

On note m_e la masse de l'électron, e la charge élémentaire et T la période de révolution de l'électron.

1. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_O$ de l'électron par rapport à O en fonction de m_e , r , $\dot{\theta}$ et $\vec{e}_z$.
2. Si le mouvement est circulaire uniforme, quelle relation peut-on donner entre la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la période T de révolution de l'électron ? En déduire l'expression de $\vec{L}_O$ en fonction de m_e , T et du vecteur surface $\vec{S}$.
3. Le mouvement de l'électron peut être assimilé à une boucle de courant. En déduire l'expression de l'intensité I du courant associé en fonction de e et de T .
4. En déduire l'expression du moment magnétique $\vec{M}$ de l'électron en fonction de son moment cinétique $\vec{L}_O$.
5. Estimer l'ordre de grandeur du moment magnétique de l'électron dans l'état fondamental ($n = 1$).

On donne :

$$e \simeq 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad m_e \simeq 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad \hbar \simeq 1,05 \times 10^{-34} \text{ J s}.$$

Correction :**1. Expression du moment cinétique :**

Par définition du moment cinétique :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v}.$$

Pour un mouvement circulaire de rayon r :

$$\boxed{\vec{L}_O = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z}$$

2. Relation avec la période de révolution :

Pour un mouvement circulaire uniforme, l'électron effectue un tour complet, soit un angle 2π , pendant une durée T . Ainsi :

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}.$$

On obtient alors :

$$\vec{L}_O = m_e \frac{2\pi r^2}{T} \vec{e}_z.$$

Or le vecteur surface orientée de la boucle est :

$$\vec{S} = \pi r^2 \vec{e}_z.$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{L}_O = 2m_e \frac{\vec{S}}{T}}$$

3. Courant électrique associé au mouvement de l'électron :

L'électron, de charge $-e$, effectue un tour complet en une durée T . Le courant associé au mouvement de l'électron vaut donc :

$$\boxed{I = \frac{-e}{T}}$$

4. Expression du moment magnétique :

Pour une boucle de courant, le moment magnétique est donné par :

$$\vec{m} = I \vec{S}.$$

D'après la question 2 :

$$\vec{S} = \frac{T}{2m_e} \vec{L}_O.$$

On en déduit :

$$\vec{m} = -\frac{e}{T} \frac{T}{2m_e} \vec{L}_O.$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_O}$$

Le moment magnétique de l'électron est donc opposé à son moment cinétique, en raison de la charge négative de l'électron.

5. Ordre de grandeur du moment magnétique :

Dans l'état fondamental, $n = 1$, donc :

$$\|\vec{L}_O\| \simeq \hbar.$$

D'après la relation obtenue à la question 4 :

$$\|\vec{m}\| = \frac{e\hbar}{2m_e}.$$

Par analyse des puissances de dix :

$$\|\vec{m}\| \sim \frac{10^{-19} \times 10^{-34}}{10^{-30}} \sim 10^{-23} \text{ A m}^2.$$

Plus précisément :

$$\|\vec{m}\| \simeq 9,2 \times 10^{-24} \text{ A m}^2.$$

On retrouve ainsi l'ordre de grandeur caractéristique du moment magnétique d'un électron :

$$\boxed{\|\vec{m}\| \sim 10^{-23} \text{ A m}^2}$$

Remarques :

- On note $\gamma = -\frac{e}{2m_e}$ le rapport gyromagnétique de l'électron, de sorte que $\vec{m} = \gamma \vec{L}_O$.
- Le résultat de cette démonstration classique s'avère être toujours correct en mécanique quantique, de sorte que si l'on utilise le modèle de Bohr $\|\vec{m}\| = -\gamma n \hbar$, on peut définir un moment magnétique fondamental pour l'électron, appelé **magnéton de Bohr**, noté μ_B tel que $\mu_B = -\gamma \hbar = \frac{e}{2m_e} \hbar = 9,274 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

4. Champ magnétique créé par un dipôle magnétique

. Approximation dipolaire

L'approximation dipolaire consiste à supposer que la taille caractéristique du dipôle magnétique est négligeable devant toutes les autres distances considérées.

. Expression du champ magnétique créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire

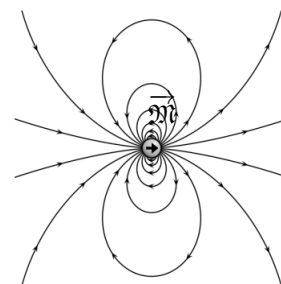
Le champ magnétique créé en un point M par le dipôle magnétique s'écrit, dans l'approximation dipolaire, de manière analogue au champ électrostatique créé par un dipôle, en remplaçant $\vec{p}$ par $\vec{m}$ et $\frac{1}{\epsilon_0}$ par μ_0 :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \|\vec{m}\|}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

On peut également écrire le champ sous la forme :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}.$$

Ces expressions ne sont **pas à retenir**. Elles sont données pour être utilisées si nécessaire.



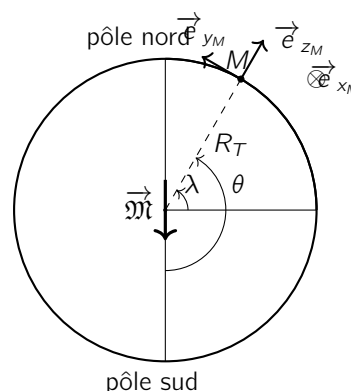
Lignes de champ du dipôle magnétique dans le cadre de l'approximation dipolaire, d'après *Physique Tout-en-un MP/MP** Dunod 2014.

Application n°7 : Exploiter l'expression fournie du champ créé par un dipôle magnétique

Énoncé :

Le champ magnétique terrestre est modélisé par le champ d'un dipôle permanent de moment $\vec{m}$ situé au centre de la Terre et dirigé du pôle Nord vers le pôle Sud. On assimile la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6360$ km. L'intensité du champ magnétique au pôle Nord terrestre est $B_0 = 6 \times 10^{-5}$ T.

1. Quelle est la valeur de $\|\vec{m}\|$?
2. Commenter la phrase « une boussole indique le Nord ».
3. Que valent les composantes horizontale et verticale du champ magnétique terrestre en Guadeloupe ? On prendra une latitude $\lambda = 16^\circ$.



Modèle dipolaire du champ magnétique terrestre.

Correction :

1. Détermination du moment magnétique terrestre :

Pour un point M donné, on identifie les composantes verticale (suivant l'axe Mz) et horizontale (suivant l'axe My) du champ $\vec{B}(M)$ à partir de l'expression du champ d'un dipôle magnétique.

On a :

$$\vec{e}_r \equiv \vec{e}_{z_M}, \quad \vec{e}_\theta \equiv \vec{e}_{y_M}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \lambda.$$

Ainsi :

$$B_y = \frac{\mu_0 \|\vec{m}\| \cos \lambda}{4\pi R_T^3}$$

$$B_z = -\frac{2\mu_0 \|\vec{m}\| \sin \lambda}{4\pi R_T^3}.$$

Au pôle Nord, $\lambda = 90^\circ$. On a alors :

$$B_z = -\frac{2\mu_0 \|\vec{m}\|}{4\pi R_T^3} = -B_0.$$

On en déduit :

$$\|\vec{m}\| = \frac{2\pi R_T^3 B_0}{\mu_0}$$

soit numériquement :

$$\|\vec{m}\| \simeq 7,7 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

2. Interprétation du fonctionnement d'une boussole :

En réalité, le pôle Nord géographique correspond approximativement au pôle Sud du dipôle magnétique terrestre.

Une boussole s'aligne sur les lignes de champ magnétique terrestre. Son pôle Nord pointe donc vers le pôle Sud magnétique terrestre, situé à proximité du pôle Nord géographique.

3. Champ magnétique en Guadeloupe :

En Guadeloupe, on prend $\lambda = 16^\circ$. Les composantes horizontale et verticale du champ sont donc :

$$B_y = \frac{\mu_0 \|\vec{m}\| \cos \lambda}{4\pi R_T^3}$$

$$B_z = -\frac{2\mu_0 \|\vec{m}\| \sin \lambda}{4\pi R_T^3}$$

5. Ordre de grandeur de moment magnétique

Moment magnétique	Ordre de grandeur
▷ d'un électron	$\approx 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$
▷ d'un aimant droit usuel	$\approx 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$
▷ de la Terre	$\approx 8 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$

6. Action d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle magnétique

. Dans un champ magnétique extérieur uniforme

On admet qu'un dipôle placé dans un champ magnétostatique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}}$ uniforme subit comme actions :

- une résultante des forces nulles $\vec{F} = \vec{0}$;
- un couple de moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$.

Le dipôle magnétique va ainsi s'orienter dans la direction de $\vec{B}_{\text{ext}}$, avec deux positions d'équilibre : $\vec{m}$ et $\vec{B}_{\text{ext}}$ de même sens (équilibre stable) ou de sens opposés (équilibre instable).

Remarques :

- Ces résultats ont été montrés dans le cas d'une spire rectangulaire en 1^{ère} année.
- À nouveau, les actions sont similaires à celles subies par un dipôle électrostatique dans un champ $\vec{E}_{\text{ext}}$.

. Dans un champ magnétique extérieur non uniforme

L'effet du champ magnétostatique sur le dipôle est :

- d'orienter le dipôle dans le sens du champ magnétostatique (effet principal) ;
- d'attirer le dipôle vers les zones de champ magnétostatique fort.

. Énergie potentielle d'interaction

Par analogie avec le champ électrostatique, l'énergie potentielle d'interaction du dipôle magnétique dans le champ $\vec{B}_{\text{ext}}$ (uniforme ou non uniforme) est :

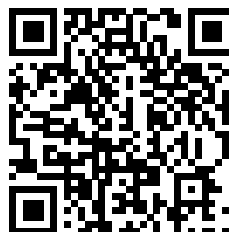
$$\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

. Aspect historique

L'expérience de Stern et Gerlach réalisée en 1922 a permis d'observer que le moment magnétique des atomes (et donc leur moment cinétique) était quantifié ! Cette expérience a été très importante lors de cette époque où la mécanique quantique était en construction.



QR Code - L'expérience de Stern et Gerlach en 1min30 s



QR Code - L'expérience de Stern et Gerlach en 14min38 s