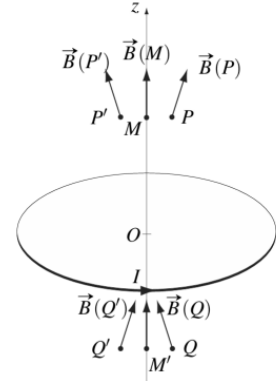


**Applications de cours :**

- 1) Déterminer le champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infini.
- 2) Déterminer le champ magnétostatique créé par un solénoïde infini.
- 3) (MP2I) Établir l'expression de l'inductance d'une bobine de grande longueur assimilée à un solénoïde infini en résonnant sur le flux propre. Le champ à l'intérieur de la bobine sera rappelé sans démonstration.

**Symétrie, Invariance et Théorème d'Ampère :**□ **Exercice 5.1. Symétries du champ magnétostatique ★**

Le plan contenant l'axe  $Oz$  et orthogonal au vecteur  $\vec{MP}$  est plan d'antisymétrie de la spire. Le point  $P'$  est le symétrique de  $P$  par rapport à ce plan donc le champ en  $P'$  est le symétrique du champ en  $P$ . De même le champ en  $Q'$  est le symétrique du champ en  $Q$ . Le plan de la spire est un plan de symétrie des courants. Les champs en  $M'$ ,  $P'$  et  $Q'$  sont donc les opposés des symétriques des champs en  $M$ ,  $P$  et  $Q$  respectivement.

□ **Exercice 5.2. Lignes de champ ★**

Les lignes de champ correspondent à un champ magnétostatique si le flux de ce champ est nul à travers toute surface fermée.

Figure (a) : le champ est uniforme donc son flux est nul à travers toute surface fermée, il peut s'agir d'un champ magnétostatique. La circulation de ce champ à travers tout contour est nul également, donc il n'y a pas de courants.

Figure (b) : il n'existe pas de surface fermée à travers laquelle le flux du champ est non nul, il peut donc s'agir d'un champ magnétostatique. Des courants sont présents au centre de la figure (vers l'avant) puisque la circulation de ce champ le long de cercles centrés au centre de la figure est non nulle.

Figure (c) : il est possible de mettre en évidence un contour le long duquel la circulation du champ n'est pas nulle (tout cercle centré sur le centre de la figure) : ce n'est pas un champ magnétostatique.

Figure (d) : le flux de ce champ est nul à travers toute surface fermée, il peut donc s'agir d'un champ magnétostatique. La circulation de ce champ le long d'un rectangle à gauche ou à droite de la figure est non nulle. Il existe donc des courants vers l'avant de la figure dans la partie gauche et vers l'arrière de la figure dans la partie droite.

□ **Exercice 5.3. Bobine torique ★**

On utilise des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

Pour tout point  $M$  de l'espace, le plan contenant  $M$  et l'axe  $(Oz)$  (plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ ) est plan de symétrie de la bobine ; le champ magnétique en  $M$  est donc orthogonal à ce plan soit

$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta.$$

D'autre part, la distribution est invariante par rotation autour de  $Oz$  donc  $B(r, \theta, z)$  ne dépend pas de  $\theta$ . Finalement

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta.$$

On applique le théorème d'Ampère en prenant pour contour fermé le cercle d'axe  $(Oz)$  de rayon  $r$  passant par  $M$  orienté dans le sens direct autour de  $(Oz)$

$$C_B = \oint_{\text{cercle}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\text{cercle}} B(r, \theta) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = 2\pi r B(r, \theta).$$

$$I_{\text{int}} = \begin{cases} NI & \text{si } M \text{ est à l'intérieur du tore;} \\ 0 & \text{si } M \text{ est à l'extérieur du tore.} \end{cases}$$

De la relation  $C_B = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$  on tire

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{si } M \text{ est à l'intérieur du tore;} \\ \vec{0} & \text{si } M \text{ est à l'extérieur du tore.} \end{cases}$$

## □ Exercice 5.4. Cylindre parcouru par un courant inhomogène ★★

1 Par définition, l'intensité qui parcourt le cylindre vaut

$$I = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dS.$$

Sachant qu'en coordonnées cylindriques  $dS = r dr d\theta$ ,

$$I = 2\pi J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = 2\pi J_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi J_0 \frac{R^2}{4}$$

d'où on déduit

$$J_0 = \frac{2}{\pi R^2} I.$$

2 Soit  $M$  un point de l'espace où l'on cherche à calculer le champ magnétique.

• **Symétries** : le plan passant par  $M$  et contenant l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan, c'est-à-dire

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

Ceci est cohérent avec le fait que le plan passant par  $M$  et orthogonal à l'axe du cylindre est plan d'antisymétrie de la distribution de courant, si bien que  $\vec{B}$  appartient à ce plan.

• **Invariances** : la distribution de courant est invariante par translation le long de  $(Oz)$  et par rotation autour de cet axe. Le champ  $\vec{B}(M)$  ne dépend donc ni de  $z$  ni de  $\theta$ , c'est-à-dire

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta.$$

• **Théorème d'Ampère** : on raisonne sur un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $r$  et de normale  $\vec{e}_z$ .

Circulation de  $\vec{B}$  :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B_\theta(r) \vec{e}_\theta \cdot d\vec{\ell} \vec{e}_\theta = 2\pi r B_\theta(r).$$

Courant enlacé :

▷ si  $r \geq R$  :  $I_{\text{enl}} = I$  ;

▷ si  $r \leq R$  :

$$I_{\text{enl}} = \iint_{\text{disque}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^3}{R^2}\right) dr' = 2\pi J_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right) \quad \text{d'où} \quad I_{\text{enl}} = \frac{2I}{R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right).$$

Conclusion :

$$2\pi r B_\theta(r) = \begin{cases} \mu_0 I & \text{si } r \geq R \\ \mu_0 \frac{2I}{R^2} \left(r^2 - \frac{r^4}{2R^2}\right) & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

soit finalement

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \frac{\mu_0 2I}{2\pi R^2} \left(r - \frac{r^3}{2R^2}\right) \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

**Induction (MP2I) :**□ **Exercice 5.5. Solénoïdes imbriqués ★★**

1 Cf. cours : pour un solénoïde parcouru par un courant  $i$ , d'axe  $(Oz)$  orienté par la règle de la main droite par rapport au sens de  $i$ , le champ est uniforme à l'intérieur et vaut

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z,$$

où  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur.

2 Par hypothèse,  $L \gg r_1$  et  $r_2$ , ce qui justifie d'approximer les solénoïdes comme infinis. En notant  $i_1$  et  $i_2$  les courants qui y circulent et compte tenu de l'orientation des spires, le champ qu'ils créent en leur intérieur vaut

$$\vec{B}_{1,2} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_{1,2} \vec{e}_z.$$

**Inductance propre  $L_1$  :**

▷ Flux créé par  $\mathcal{S}_1$  au travers d'une spire  $s_1$  de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_1(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_1$$

▷ Flux total créé par  $\mathcal{S}_1$  au travers de lui-même :

$$\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_1.$$

▷ Inductance propre : par définition,  $\phi_{\mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1} = L_1 i_1$  donc

$$L_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**Inductance propre  $L_2$  :** par la même démarche,

$$L_2 = \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

**Inductance mutuelle  $M$  :** comme le champ créé par  $\mathcal{S}_2$  est uniforme à l'intérieur de  $\mathcal{S}_1$  alors que la réciproque n'est pas vraie, il est plus simple de calculer  $M$  à partir du flux créé par  $\mathcal{S}_2$  au travers de  $\mathcal{S}_1$ .

▷ Flux créé par  $\mathcal{S}_2$  au travers d'une spire  $s_1$  de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_2(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2$$

▷ Flux total créé par  $\mathcal{S}_2$  au travers de  $\mathcal{S}_1$  :

$$\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = N \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_2.$$

▷ Inductance mutuelle : par définition,  $\phi_{\mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1} = M i_2$  donc

$$M = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}.$$

3 Le circuit équivalent est tracé figure 2. Le circuit 1 contient une bobine et un générateur de courant imposant le courant  $i_1$ , le circuit 2 ne contient qu'une bobine court-circuitée. Il y a couplage inductif entre les deux circuits. Compte tenu de la convention récepteur,

$$u_1 = +L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = +L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

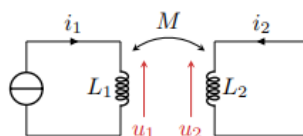


Figure 2 – Circuit électrique équivalent.

D'après la loi des mailles,  $u_2 = 0$  donc

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

et par intégration

$$i_2 = -\frac{M}{L_2} i_1 + \text{cte.}$$

Comme le solénoïde  $S_2$  n'est pas relié à un générateur, on peut supposer qu'il n'y a pas de courant continu qui serait physiquement impossible à cause des résistances des fils, même si elles sont faibles. Finalement,

$$i_2(t) = -\frac{M}{L_2} I \cos(\omega t),$$

d'amplitude

$$I_2 = \frac{M}{L_2} I = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 I.$$

4 D'après le principe de superposition, en un point  $M$  se trouvant à l'intérieur des deux solénoïdes,

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} (i_1 + i_2) \vec{e}_z$$

d'où en remplaçant

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{\ell} \left[ 1 - \frac{M}{L_2} \right] I \cos(\omega t) \vec{e}_z = \mu_0 \frac{N}{\ell} \left[ 1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \right] I \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

#### □ Exercice 5.6. Mesure d'une inductance mutuelle ★

1 Comme l'oscilloscope est idéal, tout se passe comme si la bobine 2 était en circuit ouvert, **le courant la traversant est donc nul :  $\forall t, i_2(t) = 0$** . D'après la loi de comportement, on aurait

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad \dots \text{ce qui est faux!}$$

La loi de comportement de la bobine n'est pas applicable ici car elle est établie en ne tenant compte *que* de l'auto-induction alors qu'ici **il faut également prendre en compte l'induction mutuelle** entre les deux bobines  $L_1$  et  $L_2$ .

2 En prenant en compte l'induction mutuelle, la loi de comportement devient

$$u_2 = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = M \frac{di_1}{dt},$$

puis d'après la loi d'Ohm on a simplement

$$u_2 = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}.$$

3 Traduisons la relation précédente en représentation complexe :

$$\underline{U}_2 = j\omega \frac{M}{R} \underline{U}_1.$$

Comme  $U_{1,2} = |\underline{U}_{1,2}|$  alors

$$U_2 = \omega \frac{M}{R} U_1 \quad \text{d'où} \quad M = \frac{R U_2}{2\pi f U_1} = 1,3 \text{ mH.}$$

4 ▷ Lorsque la bobine 2 est tournée de  $180^\circ$ , elle retrouve exactement la configuration géométrique de départ excepté le sens de branchement des fils, qui est inversé : on mesure alors  $u'_2 = -u_2$ , et le même calcul que précédemment montre que la valeur de  **$M$  est inchangée.**

En toute rigueur,  $M$  change de signe, mais le signe d'une inductance mutuelle dépend des orientations des courants, donc de conventions, et n'a donc pas vraiment de pertinence physique.

▷ Lorsque la bobine est tournée de  $90^\circ$ , beaucoup moins de lignes du champ magnétique créé par la bobine 1 peuvent traverser la bobine 2, si bien que le flux  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  est nettement diminué à courant  $i_1$  fixé, ce qui veut dire que  **$M$  est plus faible.**

▷ Au contraire, si la bobine 2 est placée sur le même axe que la bobine 1 alors davantage de lignes de champ issues de la bobine 1 traversent la bobine 2, donc le flux  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  est plus élevé à courant  $i_1$  fixé, donc  **$M$  est plus grande.**

## □ Exercice 5.7. Transformateur torique ★★

1 Soit  $M$  un point quelconque de l'espace.

• **Symétries** : le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  (plan de la figure de droite de l'énoncé) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan.

$$\rightsquigarrow \vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta.$$

• **Invariances** : en supposant les spires réparties continûment, alors la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe  $(Oz)$ . Le champ  $\vec{B}(M)$  ne dépend donc pas de  $\theta$ , d'où

$$\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta.}$$

• **Théorème d'Ampère** :

▷ On raisonne sur un cercle passant par  $M$  et d'axe  $Oz$ , orienté par la règle de la main droite selon l'axe  $Oz$ .

▷ Circulation :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B(r, z) \vec{e}_\theta \cdot d\vec{\ell} \vec{e}_\theta = 2\pi r B(r, z).$$

▷ Courant enlacé : en raisonnant sur les schémas on peut facilement comprendre que le courant enlacé vaut

$$I_{\text{enl}} = \begin{cases} N_1 I_1 & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

Il faut toujours se méfier du signe des courants enlacés, par règle de la main droite avec l'orientation du contour : ici c'est positif.

▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B_\theta(r, z) = \begin{cases} \mu_0 N_1 I_1 & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } M \in \text{tore} \\ \vec{0} & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}}$$

• **Inductance propre** : Le flux au travers d'une seule spire vaut

$$\varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \iint \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi} \times \ln \frac{R+a}{R} \times a,$$

donc le flux propre du primaire est

$$\Phi_{1 \rightarrow 1} = N_1 \varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}}_{=L_1} i_1$$

2 Par le même raisonnement,

$$\boxed{L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}.}$$

3 Toutes les spires sont identiques, donc

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \varphi_{1 \rightarrow 1\text{sp}} = \underbrace{\frac{\mu_0 N_1 N_2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}}_{=M} i_1$$

On constate alors que

$$\boxed{M = \sqrt{L_1 L_2}.}$$

4 La loi de comportement des bobines, modifiée par l'induction mutuelle, et avec  $i_2 = 0$  car secondaire ouvert donne

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

On en déduit alors

$$\boxed{u_2 = \frac{M}{L_1} u_1 = \frac{N_2}{N_1} U_1 \cos(\omega t).}$$

Si  $u_1$  était constante, le courant  $i_1$  serait constant également et la loi de comportement donnerait  $u_2 = 0$ .

On retrouve ici la loi des tensions d'un transformateur, en identifiant le rapport de transformation  $m = N_2/N_1$ .

5 Du rapport des amplitudes on déduit directement

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = 20.}$$

**Dipôle magnétostatique :**□ **Exercice 5.8. Interaction entre deux dipôles électrostatiques ★★**

1. En utilisant l'expression fournie du champ d'un dipôle, on obtient

$$\mathcal{E}_p = \frac{-\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{u}_r)(\vec{m}_2 \cdot \vec{u}_r) - \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{r^3} \text{ avec } \vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r} \text{ et } r = OM.$$

2. Si les dipôles sont colinéaires à  $\vec{u}_r$  :

$$\mathcal{E}_p = \frac{-\mu_0}{4\pi} \frac{2m_1 m_2}{r^3}$$

d'où :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{\text{grad}} \mathcal{E}_p = \frac{-\mu_0}{4\pi} \frac{6m_1 m_2}{r^4} \vec{u}_r$$

**L'interaction est attractive.**

3. Si les dipôles sont colinéaires entre eux et perpendiculaires à  $\vec{u}_r$  :

$$\mathcal{E}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^3}$$

d'où :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{\text{grad}} \mathcal{E}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m_1 m_2}{r^4} \vec{u}_r$$

**L'interaction est répulsive.** L'expérience est très facile à faire avec des petits aimants.

4. Le moment magnétique des atomes est de l'ordre de grandeur du magnéton de Bohr, la distance entre deux atomes est de l'ordre de quelques dixièmes de nanomètres. L'énergie d'interaction est donc :

$$\mathcal{E}_p \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_B^2}{r^3} \simeq \frac{10^{-7} \times 10^{-46}}{(5 \times 10^{-10})^3} \simeq 8 \times 10^{-24} \text{ J}$$

La température pour laquelle  $\mathcal{E}_p \sim k_B T$  est donc de l'ordre de 0,6 K : c'est extrêmement faible. Ce n'est pas l'interaction dipôle-dipôle qui est à l'origine du magnétisme de la matière.