

DS n°1 : Parcours rouge

Exercice n°1 : Hygromètre capacitif, Mines-Ponts PC 2025**Q1. (2 pts)**

Pour un point M quelconque de l'espace, les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la répartition de charges.

Le champ électrique appartient donc à l'intersection de ces deux plans :

$$\boxed{\vec{E} = E\vec{u}_z}.$$

(0,5 pt)

La répartition de charges est invariante par translation suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$.
Le champ électrique ne dépend donc que de z :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z.$$

(0,5 pt)

Dans le milieu isolant, il n'y a pas de charges volumiques. D'après l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

(0,5 pt)

Comme le champ est dirigé suivant $\vec{u}_z$ et ne dépend que de z :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{dE}{dz} = 0.$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{E} = E\vec{u}_z \quad \text{avec } E \text{ constant.}}$$

(0,5 pt)

Le champ électrique est donc uniforme au sein du milieu isolant.

Q2. (4 pts)

On calcule séparément le champ créé par chacune des deux armatures, puis on applique le principe de superposition.

Champ créé par l'armature inférieure :

On choisit comme surface de Gauss un cylindre de section S , à cheval sur l'armature inférieure, chargée avec la densité surfacique $+\sigma_0$.

Le théorème de Gauss donne :

$$\oiint_S \vec{E}_+ \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 S}{\epsilon_0}.$$

(0,5 pt)

Le flux à travers la surface latérale est nul, car le champ lui est tangent.

Par symétrie, les flux à travers les deux bases du cylindre sont égaux. Ainsi :

$$2E_+ S = \frac{\sigma_0 S}{\epsilon_0}.$$

(0,5 pt)

Le champ créé par l'armature inférieure dans l'isolant vaut donc :

$$\vec{E}_+ = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z.$$

(0,5 pt)

Champ créé par l'armature supérieure :

On choisit de même un cylindre de Gauss à cheval sur l'armature supérieure, chargée avec la densité surfacique $-\sigma_0$.

Le théorème de Gauss donne :

$$\oiint_S \vec{E}_- \cdot d\vec{S} = -\frac{\sigma_0 S}{\epsilon_0}.$$

(0,5 pt)

En tenant compte de la symétrie du champ :

$$-2E_- S = -\frac{\sigma_0 S}{\epsilon_0}.$$

(0,5 pt)

Dans l'isolant, le champ créé par l'armature supérieure est dirigé vers cette armature :

$$\vec{E}_- = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z.$$

(0,5 pt)

Champ total :

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-.$$

(0,5 pt)

Les deux champs s'additionnent entre les armatures :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{u}_z.$$

(0,5 pt)

Q3. (2 pts)

La tension entre les armatures est :

$$U_0 = \int_0^e \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

(0,5 pt)

Le champ étant uniforme :

$$U_0 = \frac{\sigma_0 e}{\epsilon_0}.$$

(0,5 pt)

La capacité du condensateur est définie par le rapport entre la charge d'une armature et la tension entre les armatures :

$$C_0 = \frac{Q}{U_0}.$$

Or $Q = \sigma_0 S$, donc :

$$C_0 = \frac{\sigma_0 S}{U_0}.$$

(0,5 pt)

En remplaçant U_0 par son expression :

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e}.$$

(0,5 pt)

Q4. (2 pts)

Le nombre total de dipôles présents dans l'isolant est :

$$N = n_p S e.$$

(0,5 pt)

Le moment dipolaire électrique total vaut donc :

$$\vec{p}_{\text{tot}} = N \vec{p}_m.$$

Comme $\vec{p}_m = p_m \vec{e}_z$:

$$\vec{p}_{\text{tot}} = n_p S e p_m \vec{e}_z.$$

(0,5 pt)

Les charges surfaciques de dépolarisation correspondent à deux charges opposées de valeur absolue $Q_{\text{dep}} = \sigma S$, séparées par la distance e .

Le moment dipolaire correspondant a pour norme :

$$p_{\text{tot}} = \sigma S e.$$

(0,5 pt)

En identifiant les deux expressions :

$$n_p S e p_m = \sigma S e.$$

Finalement :

$$\sigma = n_p p_m.$$

(0,5 pt)

Q5. (3 pts)

À très basse température, l'agitation thermique est négligeable devant l'interaction électrostatique.

Les dipôles peuvent alors s'aligner sur le champ électrique et leur moment dipolaire moyen tend vers le moment dipolaire individuel :

$$p_m \xrightarrow{T \rightarrow 0} p_{\text{H}_2\text{O}}.$$

(0,5 pt)

À très haute température, l'agitation thermique domine. Les orientations des dipôles deviennent aléatoires et leur moment dipolaire moyen tend vers zéro :

$$p_m \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

(0,5 pt)

L'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle avec le champ électrique est :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Son ordre de grandeur est donc :

$$|E_p| \sim p_{\text{H}_2\text{O}} E.$$

(0,5 pt)

L'énergie caractéristique de l'agitation thermique est de l'ordre de $k_B T$.

(0,5 pt)

La température de transition T_c correspond à la situation dans laquelle ces deux énergies sont du même ordre de grandeur :

$$p_{\text{H}_2\text{O}} E \sim k_B T_c.$$

(0,5 pt)

On en déduit :

$$T_c \sim \frac{p_{\text{H}_2\text{O}} E}{k_B}.$$

(0,5 pt)**Q6. (2 pts)**

La relation fournie dans l'énoncé est :

$$\vec{p}_m = \alpha \epsilon_0 \vec{E}.$$

On en déduit :

$$[\alpha] = \frac{[p_m]}{[\epsilon_0][E]}.$$

(0,5 pt)

Le moment dipolaire électrique s'exprime en $C \cdot m$:

$$[p_m] = C \cdot m.$$

De plus :

$$[\epsilon_0] = F \cdot m^{-1}, \quad [E] = V \cdot m^{-1}.$$

(0,5 pt)

Comme $F \cdot V = C$:

$$[\alpha] = \frac{C \cdot m}{F \cdot m^{-1} V \cdot m^{-1}} = m^3.$$

(0,5 pt)

Ainsi :

$$[\alpha] = L^3.$$

La polarisabilité α a la dimension d'un volume et s'exprime en m^3 dans le système international.

(0,5 pt)**Q7. (5 pts)**

Dans l'isolant humide, les charges surfaciques de dépolarisation compensent partiellement les charges libres des armatures.

La densité surfacique de charge résultante est :

$$\sigma_0 - \sigma.$$

(0,5 pt)

Le champ électrique est donc relié aux charges surfaciques par :

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma}{\epsilon_0}.$$

(0,5 pt)

On en déduit :

$$\sigma_0 = \epsilon_0 E + \sigma.$$

(0,5 pt)

D'après Q4 :

$$\sigma = n_p p_m.$$

Or, d'après l'énoncé :

$$p_m = \alpha \epsilon_0 E.$$

Ainsi :

$$\sigma = n_p \alpha \epsilon_0 E.$$

(0,5 pt)

En substituant dans l'expression de σ_0 :

$$\sigma_0 = \epsilon_0 E + n_p \alpha \epsilon_0 E.$$

On factorise :

$$\sigma_0 = \epsilon_0 E (1 + n_p \alpha).$$

(0,5 pt)

La charge libre portée par une armature est :

$$Q = \sigma_0 S.$$

La tension entre les armatures vaut :

$$U_0 = Ee.$$

(0,5 pt)

Par définition de la capacité :

$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{\sigma_0 S}{Ee}.$$

(0,5 pt)

En remplaçant σ_0 :

$$C = \frac{\varepsilon_0 E (1 + n_p \alpha) S}{Ee}.$$

Après simplification :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} (1 + n_p \alpha).$$

(0,5 pt)

En utilisant l'expression de la capacité en l'absence d'humidité :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e},$$

on obtient :

$$C = (1 + n_p \alpha) C_0.$$

(0,5 pt)

Par identification avec $C = \varepsilon_r C_0$:

$$\varepsilon_r = 1 + n_p \alpha.$$

(0,5 pt)

La capacité augmente donc avec la densité de dipôles électriques présents dans l'isolant.

Total de l'exercice : 20 points.

Exercice 2 – Micro de guitare et numérisation, Centrale MPI 2024

Partie 1 – Modélisation électrique du micro

Q8. (1 pt)

À basses fréquences, la bobine et le condensateur se comportent respectivement comme un fil et un interrupteur ouvert.

Il vient donc :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} s(t) = e(t).$$

(0,5 pt)

À hautes fréquences, la bobine et le condensateur se comportent respectivement comme un interrupteur ouvert et comme un fil.

Il vient :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} s(t) = 0.$$

Les basses fréquences sont transmises tandis que les hautes fréquences sont atténuées : le filtre est donc du type **passe-bas**.

(0,5 pt)

Q9. (2 pts)

La fonction de transfert du micro est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}.$$

D'après la formule du diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

(1 pt)

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $j\omega C$, on obtient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}.$$

(1 pt)

Q10. (2 pts)

On compare les expressions :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

et

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

Par identification des numérateurs :

$$H_0 = 1.$$

(0,5 pt)

Par identification des termes en ω^2 :

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

Ainsi :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

(0,5 pt)

Enfin, par identification des termes en $j\omega$:

$$RC = \frac{1}{Q\omega_0}.$$

On en déduit :

$$Q = \frac{1}{RC\omega_0}.$$

En remplaçant ω_0 :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

(1 pt)

Q11. (3 pts)

Un phénomène de résonance apparaît lorsque l'amplitude du signal de sortie atteint un maximum.

En régime sinusoïdal forcé, pour une entrée :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t),$$

la sortie est de la forme :

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

En représentation complexe :

$$\underline{s} = \underline{H} \underline{e} = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

L'amplitude S_0 est le module de l'amplitude complexe de sortie :

$$S_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}.$$

(0,5 pt)

Pour rechercher le maximum de S_0 , on étudie le minimum de la fonction :

$$f(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}.$$

(0,5 pt)

Sa dérivée est :

$$f'(\omega) = -\frac{4\omega}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2}.$$

(0,5 pt)

Pour $\omega > 0$, la condition $f'(\omega) = 0$ donne :

$$-2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{1}{Q^2} = 0.$$

Ainsi :

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2}.$$

(0,5 pt)

Une pulsation de résonance strictement positive existe si :

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(0,5 pt)

Dans ce cas :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

(0,5 pt)

L'étude du signe de f' confirme qu'il s'agit d'un minimum de f , donc d'un maximum de S_0 .

Q12. (3 pts)

Le gain en décibels du filtre est :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \left(\frac{S_0(\omega)}{E_0} \right).$$

Ainsi :

$$G_{dB}(\omega) = -10 \log_{10} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2} \right].$$

(0,5 pt)

En basses fréquences : $\omega \ll \omega_0$.

$$G_{dB}(\omega) \simeq 0.$$

L'asymptote est horizontale, à 0 dB.

(0,5 pt)

À la pulsation propre : $\omega = \omega_0$.

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log_{10}(Q).$$

(0,5 pt)

En hautes fréquences : $\omega \gg \omega_0$.

$$G_{dB}(\omega) \simeq -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

L'asymptote présente donc une pente de -40 dB par décade.

(0,5 pt)

Pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, le diagramme présente un pic de résonance à ω_r .

Le tracé doit faire apparaître le plateau à 0 dB, le pic de résonance et l'asymptote de pente -40 dB par décade.

(1 pt)

Q13. (1 pt)

Pour tracer expérimentalement un diagramme de Bode, on impose au filtre un signal sinusoïdal dont on fait varier la fréquence.

(0,5 pt)

À chaque fréquence, on mesure à l'oscilloscope les amplitudes d'entrée E_0 et de sortie S_0 .

On calcule alors :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{S_0}{E_0} \right),$$

puis on trace le gain en fonction du logarithme de la fréquence.

(0,5 pt)

Q14. (1 pt)

Dans le cas du micro de guitare, seule la tension de sortie $s(t)$ est directement accessible expérimentalement.

La force électromotrice induite $e(t)$ par le mouvement de la corde n'est pas directement mesurable.

(0,5 pt)

Il est donc impossible de mesurer directement le rapport $\frac{S_0}{E_0}$ nécessaire au tracé du diagramme de Bode du micro.

(0,5 pt)

Q15. (2 pts)

On ajoute un potentiomètre de résistance r en parallèle du condensateur C .

À fréquence nulle, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil.

Le circuit se ramène donc à un diviseur de tension constitué de R et r .

(0,5 pt)

Le gain statique vaut :

$$H_0 = \frac{r}{R+r} = \frac{1}{1 + \frac{R}{r}}.$$

(1 pt)

En augmentant r , le guitariste augmente le gain statique et donc le niveau du signal transmis. Le potentiomètre permet ainsi de régler le volume sonore de la guitare.

(0,5 pt)

Partie 2 – Caractérisation de deux micros

Q16. (2 pts)

L'impédance du micro est celle de l'association en parallèle du condensateur C et du dipôle série constitué de R et L .

D'après la loi d'association des impédances en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}.$$

(1 pt)

En réduisant au même dénominateur :

$$\underline{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega C(R + j\omega L)}.$$

On obtient finalement :

$$\underline{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}.$$

(1 pt)

Q17. (1 pt)

Les deux dipôles de résistances respectives r et d'impédance $\underline{Z}$ sont associés en série. Ils sont donc traversés par le même courant complexe $\underline{i}$:

$$\underline{i} = \frac{U_r}{r} = \frac{U_Z}{\underline{Z}}.$$

(0,5 pt)

On en déduit :

$$\underline{Z} = r \frac{U_Z}{U_r}.$$

(0,5 pt)

Q18. (2 pts)

En basses fréquences :

$$\omega^2 LC \ll 1, \quad \omega RC \ll 1, \quad \omega L \ll R.$$

L'expression de l'impédance se simplifie :

$$\underline{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \simeq R.$$

(0,5 pt)

D'après Q17 :

$$R \simeq r \left| \frac{U_Z}{U_r} \right|.$$

(0,5 pt)

Sur le graphique, on lit en basses fréquences :

$$\left| \frac{U_Z}{U_r} \right|_{\text{Fender}} \simeq 1,5,$$

et

$$\left| \frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r} \right|_{\text{Dynasonic}} \simeq 0,7.$$

Avec $r = 10 \text{ k}\Omega$:

$$R_{\text{Fender}} \simeq 15 \text{ k}\Omega$$

(0,5 pt)

$$R_{\text{Dynasonic}} \simeq 7 \text{ k}\Omega.$$

(0,5 pt)

Q19. (3 pts)

Pour des fréquences de l'ordre de 1 kHz, l'impédance du micro est dominée par R et L .
Le micro peut donc être modélisé par un dipôle RL série :

$$\underline{Z} \simeq R + j\omega L.$$

(0,5 pt)

En prenant le module :

$$|\underline{Z}| \simeq \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

(0,5 pt)

Or, d'après Q17 :

$$|\underline{Z}| = r \left| \frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r} \right|.$$

Ainsi :

$$R^2 + \omega^2 L^2 \simeq \left(r \left| \frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r} \right| \right)^2.$$

On en déduit :

$$L \simeq \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(r \left| \frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r} \right| \right)^2 - R^2}.$$

(1 pt)

Pour $f = 1 \text{ kHz}$, on lit sur le graphique :

$$\left| \frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r} \right|_{\text{Fender}} \simeq 6, \quad \left| \frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r} \right|_{\text{Dynasonic}} \simeq 1,5.$$

Pour le micro Fender :

$$L_{\text{Fender}} \simeq \frac{1}{2\pi \times 10^3} \sqrt{(10^4 \times 6)^2 - (15 \times 10^3)^2}.$$

D'où :

$$L_{\text{Fender}} \simeq 9 \text{ H}.$$

(0,5 pt)

Pour le micro Dynasonic :

$$L_{\text{Dynasonic}} \simeq \frac{1}{2\pi \times 10^3} \sqrt{(10^4 \times 1,5)^2 - (7 \times 10^3)^2}.$$

D'où :

$$L_{\text{Dynasonic}} \simeq 2 \text{ H}.$$

(0,5 pt)

Q20. (3 pts)

On part de l'expression fournie :

$$\underline{Z} = R \frac{1 + jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

On suppose $Q \gg 1$ et ω proche de ω_0 .

Au numérateur :

$$1 + jQ \frac{\omega}{\omega_0} \simeq jQ.$$

(0,5 pt)

Au dénominateur :

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right) \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \simeq 2 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

De plus :

$$\frac{\omega}{Q\omega_0} \simeq \frac{1}{Q}.$$

(0,5 pt)

On obtient :

$$\underline{Z} \simeq R \frac{jQ}{2 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) + \frac{j}{Q}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par Q :

$$\underline{Z} \simeq R \frac{jQ^2}{2Q \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) + j}.$$

Dans cette approximation, le module de $\underline{Z}$ est maximal lorsque $\omega \simeq \omega_0$.

D'après Q17, cela correspond également au maximum du rapport :

$$\left| \frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r} \right|.$$

(0,5 pt)

On lit donc la fréquence f_0 du pic de résonance sur le graphique.

Comme :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = 2\pi f_0,$$

on obtient :

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L f_0^2}.$$

(0,5 pt)

Pour le micro Fender, on lit $f_0 \simeq 3 \text{ kHz}$:

$$C_{\text{Fender}} \simeq \frac{1}{4\pi^2 \times 9 \times (3 \times 10^3)^2}.$$

D'où :

$$C_{\text{Fender}} \simeq 0,3 \text{ nF}.$$

(0,5 pt)

Pour le micro Dynasonic, on lit $f_0 \simeq 25 \text{ kHz}$:

$$C_{\text{Dynasonic}} \simeq \frac{1}{4\pi^2 \times 2 \times (25 \times 10^3)^2}.$$

D'où :

$$C_{\text{Dynasonic}} \simeq 0,02 \text{ nF}.$$

(0,5 pt)

Q21. (1 pt)

Sur la figure 8, le micro Dynasonic présente une résonance étroite vers 25 kHz, dans le domaine des ultrasons.

Le micro Fender présente, quant à lui, une résonance vers 3 kHz, dans la partie aiguë du domaine audible. (0,5 pt)

Cette résonance permet au micro Fender d'amplifier préférentiellement une plage de fréquences située dans la partie supérieure du domaine audible.

Il peut donc produire un son perçu comme plus aigu que celui du micro Dynasonic.

(0,5 pt)

Total des parties 1 et 2 : 27 points.

Partie 3 – Numérisation du signal

Q22. (1 pt)

Les amplificateurs linéaires intégrés A_0 , A_1 et A_2 sont supposés idéaux. Les intensités des courants à leurs entrées sont donc nulles.

Les quatre résistances R sont ainsi parcourues par le même courant. On peut appliquer la formule du pont diviseur de tension.

(0,5 pt)

On obtient :

$$V_0 = \frac{R}{4R} V_{cc} = \frac{V_{cc}}{4}$$

$$V_1 = \frac{2R}{4R} V_{cc} = \frac{V_{cc}}{2}$$

$$V_2 = \frac{3R}{4R} V_{cc} = \frac{3V_{cc}}{4}$$

(0,5 pt pour les trois valeurs)

Q23. (2 pts)

Un ALI idéal utilisé en comparateur fonctionne en régime saturé.

Si $V_+ > V_-$, sa sortie est en saturation positive, ce qui correspond à l'état logique 1.

Si $V_+ < V_-$, sa sortie est en saturation négative, ce qui correspond à l'état logique 0.

(0,5 pt)

Sur le schéma, les tensions de référence V_0 , V_1 et V_2 sont appliquées aux entrées inverseuses des comparateurs.

Les sorties S_0 , S_1 et S_2 passent donc à l'état haut lorsque V_e dépasse respectivement V_0 , V_1 et V_2 .

La porte 1 réalise une fonction ET et la porte 2 une fonction OU. On a donc :

$$b_1 = S_1 \quad \text{et} \quad b_0 = (\overline{S_1} \cdot S_0) + S_2.$$

La table de vérité est alors :

V_e	S_0	S_1	S_2	b_0	b_1
$0 < V_e < \frac{V_{cc}}{4}$	0	0	0	0	0
$\frac{V_{cc}}{4} < V_e < \frac{V_{cc}}{2}$	1	0	0	1	0
$\frac{V_{cc}}{2} < V_e < \frac{3V_{cc}}{4}$	1	1	0	0	1
$\frac{3V_{cc}}{4} < V_e < V_{cc}$	1	1	1	1	1

(1,5 pt : 0,5 pt pour S_0, S_1, S_2 , 1 pt pour b_0, b_1)

Q24. (1 pt)

Un convertisseur flash sur n bits doit distinguer 2^n niveaux de tension.

Il faut donc $2^n - 1$ seuils de comparaison, soit autant de comparateurs.

(0,5 pt)

Pour un convertisseur flash sur 24 bits :

$$N = 2^{24} - 1.$$

Ainsi :

$$N = 16\,777\,215 \text{ comparateurs.}$$

(0,5 pt)**Q25. (3 pts)**

L'ALI est idéal : aucun courant ne pénètre dans son entrée non inverseuse.

Le circuit d'entrée se comporte donc comme un dipôle RC série.

Lorsque l'interrupteur K est fermé, la loi des mailles donne :

$$V_e = u_R + u_C.$$

Or :

$$u_R = Ri \quad \text{et} \quad i = C \frac{du_C}{dt}.$$

On obtient l'équation différentielle :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = V_e.$$

(0,5 pt)

Les variations de V_e étant supposées très lentes devant la durée de charge, on considère V_e constant.

La solution générale est :

$$u_C(t) = V_e + Ae^{-t/(RC)}.$$

Le condensateur étant initialement déchargé :

$$u_C(0) = 0,$$

d'où $A = -V_e$.

Finalement :

$$u_C(t) = V_e \left(1 - e^{-t/(RC)} \right).$$

(1 pt)

On cherche l'instant t_1 auquel $u_C(t_1) = 0,99V_e$:

$$1 - e^{-t_1/(RC)} = 0,99.$$

Ainsi :

$$e^{-t_1/(RC)} = 0,01$$

et

$$t_1 = -RC \ln(0,01).$$

On en déduit :

$$t_1 \simeq 4,6RC.$$

(1 pt)

Pour que le condensateur atteigne au moins 99 % de la tension d'entrée avant chaque ouverture de l'interrupteur, il faut que la durée de fermeture soit supérieure à $4,6RC$.

En assimilant cette durée à une demi-période d'échantillonnage :

$$\frac{1}{2f_e} > 4,6RC.$$

La contrainte sur le produit RC est donc :

$$RC < \frac{1}{9,2f_e} \simeq \frac{1}{10f_e}.$$

(0,5 pt)**Q26. (1 pt)**

Lorsque l'interrupteur est ouvert, le condensateur est isolé de la tension d'entrée.

L'ALI est monté en suiveur, avec une rétroaction négative. Il fonctionne donc en régime linéaire :

$$V_s = V_- = V_+ = u_C.$$

L'ALI étant idéal, le courant entrant dans son entrée non inverseuse est nul.

Le condensateur ne se décharge donc pas :

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = 0.$$

On obtient :

$$V_s = u_C = \text{constante.}$$

(0,5 pt)

L'intérêt de l'échantillonneur-bloqueur est de prélever une valeur du signal analogique, puis de la maintenir constante pendant la durée nécessaire à sa conversion numérique.

(0,5 pt)

Q27. (2 pts)

On part de l'état initial :

$$R = 0, \quad S = 1, \quad Q = 1, \quad u_C = 0.$$

Le condensateur se charge à travers $R_A + R_B$ tant que $Q = 1$.

Lorsque u_C atteint $\frac{2V_{CC}}{3}$, la bascule change d'état :

$$Q : 1 \rightarrow 0.$$

Le condensateur se décharge alors à travers R_B .

Lorsque u_C atteint $\frac{V_{CC}}{3}$, la bascule change à nouveau d'état :

$$Q : 0 \rightarrow 1.$$

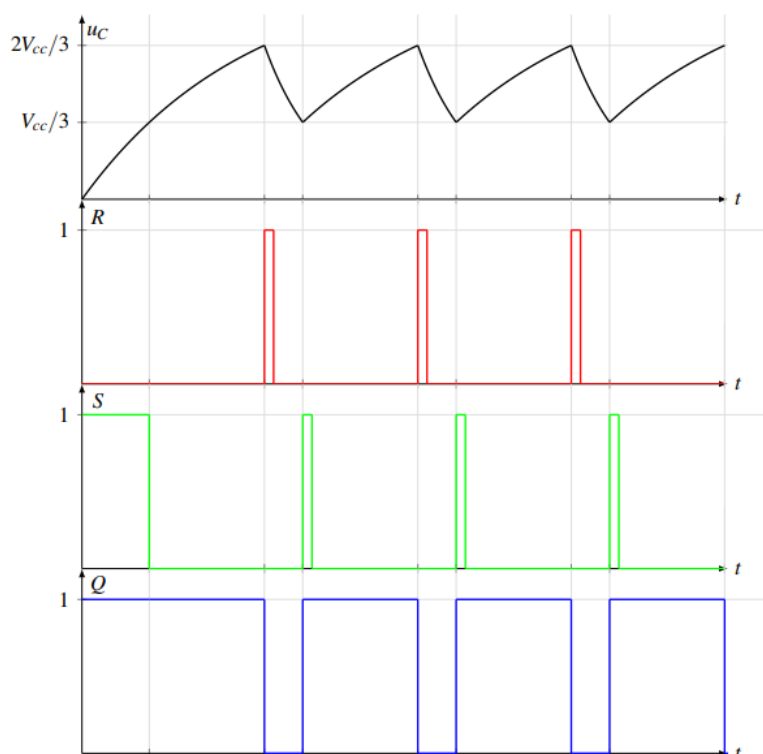
Le cycle recommence.

(0,5 pt)

Les chronogrammes doivent faire apparaître :

- une tension u_C qui évolue entre $\frac{V_{CC}}{3}$ et $\frac{2V_{CC}}{3}$;
- de brèves impulsions sur R lors du franchissement du seuil haut ;
- de brèves impulsions sur S lors du franchissement du seuil bas ;
- un signal Q à l'état haut pendant la charge et à l'état bas pendant la décharge.

(1,5 pt pour les chronogrammes cohérents)



Q28. (1 pt)

D'après le fonctionnement précédent, la durée de l'état haut de Q est proportionnelle à la constante de temps de charge :

$$t_H \propto (R_A + R_B)C.$$

La durée de l'état bas est proportionnelle à la constante de temps de décharge :

$$t_B \propto R_B C.$$

Le rapport cyclique vaut :

$$\alpha = \frac{t_H}{t_H + t_B}.$$

On obtient :

$$\alpha = \frac{R_A + R_B}{R_A + 2R_B}.$$

(0,5 pt)

Pour des résistances strictement positives :

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Il est donc impossible d'obtenir directement un temps à l'état haut très inférieur au temps à l'état bas.

En choisissant $R_A \gg R_B$, on obtient $\alpha \simeq 1$.

Il suffit alors d'ajouter une porte NON à la sortie Q pour inverser le signal : le temps à l'état haut devient très court devant le temps à l'état bas.

(0,5 pt)**Q29. (2 pts)**

On propose la fonction Python suivante. On suppose que la fréquence d'échantillonnage f_e est définie comme variable globale.

```
import numpy as np

def flanger(e, omega, tau, dtau):
    s = []
    temps = np.arange(len(e)) / f_e

    for k in range(len(e)):

        # Retard module
        tau_add = tau + dtau * np.sin(omega * temps[k])

        # Instant correspondant au signal retarde
        t_retarde = temps[k] - tau_add

        if t_retarde < 0:
            s.append(e[k])
        else:
            indice = np.argmin(np.abs(temps - t_retarde))
            s.append(e[k] + e[indice])

    return s
```

Le retard variable est calculé conformément à l'énoncé :

$$\tau(t) = \tau_0 + \delta\tau \sin(\omega t).$$

(0,5 pt)

L'instant retardé $t - \tau(t)$ est ensuite converti en un indice du tableau échantillonné.

(0,5 pt)

On additionne le signal initial et le signal retardé :

$$s(t) = e(t) + e(t - \tau(t)).$$

(0,5 pt)

Le programme traite les instants pour lesquels le signal retardé n'est pas encore disponible, puis renvoie la liste des échantillons filtrés.

(0,5 pt)**Total de la partie 3 : 13 points.****TOTAL DE L'EXERCICE 2 : 40 POINTS.****Bonus de présentation (6 points)**

L'attribution du bonus de présentation tient compte de la qualité globale de la copie : lisibilité de l'écriture, orthographe et syntaxe, encadrement des résultats, absence de ratures au milieu d'un calcul, etc.

Ce bonus traduit votre impression globale à l'issue de la correction.

Attribution du bonus :

6 points : La correction de la copie n'a occasionné aucune difficulté de lecture ou de compréhension. La présentation n'a pas gêné le correcteur au cours de son travail.

3 points : La correction de la copie a nécessité un effort supplémentaire en raison de sa présentation. Le correcteur a été gêné à plusieurs reprises par des défauts de présentation.

0 point : La copie est difficilement déchiffrable ou extrêmement mal présentée. Le candidat n'a manifestement fait aucun effort pour faciliter sa lecture.

Règles particulières :

Si le candidat obtient **4 points ou moins** sur l'ensemble de la copie, attribuer systématiquement **0 point** au bonus.

Si le candidat obtient **8 points ou moins** sur l'ensemble de la copie, attribuer uniquement **0 ou 3 points** de bonus.