

DS n°1 : Parcours rouge

Exercice n°1 : Hygromètre capacitif, Mines-Ponts PC 2025

Pour évaluer la pression partielle de vapeur d'eau dans l'atmosphère, les ballons-sondes utilisent des hygromètres capacitifs ; il s'agit de condensateurs formés de deux plaques métalliques planes, de grande surface S , disposées en vis-à-vis et séparées sur une épaisseur e par un milieu isolant : nous considérerons tout d'abord que ce milieu est électriquement équivalent au vide (figure 1). En présence d'une tension de polarisation U_0 , des charges surfaciques $\pm\sigma_0$ apparaissent sur les faces en regard du condensateur.

Q1. En supposant les dimensions transverses des électrodes très grandes devant e , préciser la direction du champ électrique $\vec{E}$ au sein de l'isolant. Montrer aussi que ce champ est uniforme au sein du milieu isolant.

Q2. Dédurre, par exemple du théorème de Gauss, la relation liant σ_0 , $\vec{E}$ et la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 .

Q3. Calculer U_0 et définir puis exprimer la capacité C_0 du condensateur ainsi réalisé.

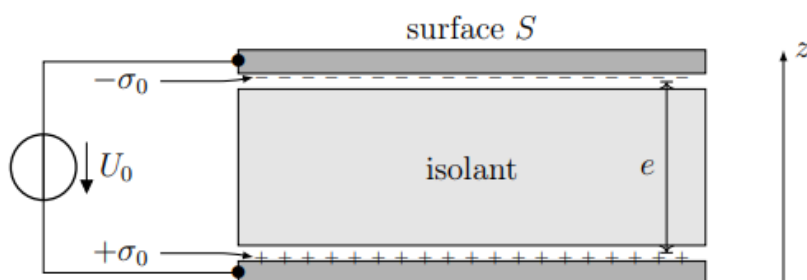


Figure 1 – Hygromètre capacitif en l'absence d'humidité.

En milieu humide, l'isolant se charge de molécules d'eau, décrites ici comme des dipôles électrostatiques qui, sur le schéma de la figure 2, sont tous alignés sur la direction du champ électrique. Dans le volume central de l'isolant, ces charges $\pm$ se compensent deux à deux mais ce n'est pas le cas sur les surfaces supérieure et inférieure de l'isolant où l'on voit apparaître des charges surfaciques dites *de dépolérisation* $\pm\sigma$. On notera n_p la densité particulière de dipôles électriques au sein de l'isolant et $\vec{p}_m = p_m \vec{e}_z$ la valeur moyenne de ces moments dipolaires moléculaires.

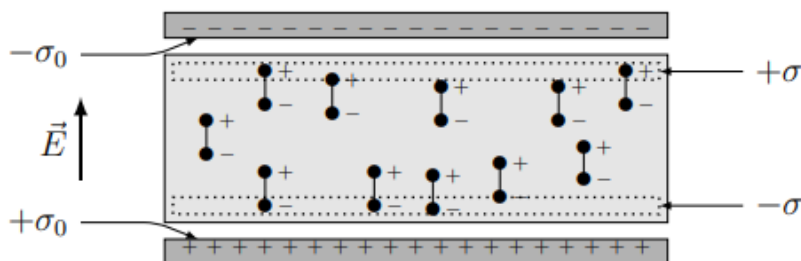


Figure 2 – Hygromètre capacitif avec isolant humide.

Q4. Exprimer le moment dipolaire électrique total du milieu isolant en fonction de n_p , S , e et p_m . En déduire l'expression des charges surfaciques de dépolérisation σ en fonction de p_m et n_p seulement.

L'ensemble de l'électronique de mesure, y compris le condensateur sensible à l'hygrométrie, est thermostaté à la température T_0 . En conséquence, l'alignement des dipôles moléculaires avec le champ électrostatique $\vec{E} = E \vec{e}_z$ n'est pas systématique puisqu'il est contrarié par l'agitation thermique.

On rappelle ici l'expression :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

de l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}$ avec un champ électrique extérieur $\vec{E}$.

Q5. Quelles seraient les limites de p_m à très basse et à très haute température ?

Exprimer, en fonction du moment dipolaire individuel $p_{\text{H}_2\text{O}}$ d'une molécule d'eau et de la constante de Boltzmann k_B , une estimation de la température de transition T_c entre ces deux limites.

Q6. En pratique, on a toujours $T_0 \gg T_c$ et on peut montrer dans ce cas l'expression asymptotique de p_m , que l'on admettra :

$$\vec{p}_m = \alpha \epsilon_0 \vec{E}.$$

Où la *polarisabilité* $\alpha > 0$ est une constante à température fixée et pour un matériau isolant donné.

Préciser la dimension ou l'unité de α dans le système international d'unités.

Q7. En déduire que la capacité C du condensateur ainsi formé s'exprime en fonction de C_0 sous la forme

$$C = \epsilon_r C_0$$

dans laquelle on exprimera la permittivité relative ϵ_r en fonction de α et n_p .

La mesure de C est donc une mesure de n_p , donc, au moyen d'un étalonnage à réaliser, une mesure électrique et interfaçable de l'hygrométrie ambiante.

Exercice 2 – Micro de guitare et numérisation, Centrale MPI 2024

Partie 1 – Modélisation électrique du micro

D'un point de vue électrique, le micro se modélise de la façon représentée à la figure 3.

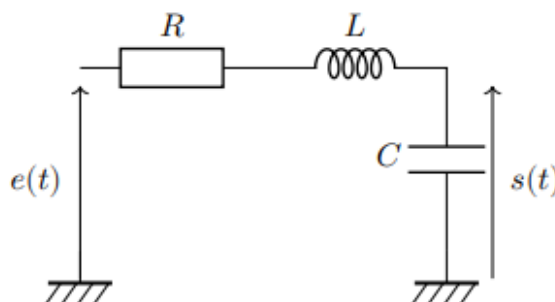


Figure 3 – Modélisation électrique du micro.

$e(t)$ est la force électromotrice induite par le mouvement de la corde. L désigne l'inductance propre du bobinage et R sa résistance. De plus, le grand nombre de spires présentes dans le bobinage provoque un effet capacitif représenté par le condensateur C .

Q8. Étudier le comportement asymptotique de ce circuit. En déduire le type de filtrage réalisé par le micro.

Q9. Donner l'expression de la fonction de transfert du micro en régime sinusoïdal forcé :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}.$$

Q10. Écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

et exprimer les paramètres H_0 , ω_0 et Q en fonction de R , L et C .

Q11. Montrer que, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance à une pulsation ω_r à déterminer.

Q12. Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude dans le cas $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Q13. Expliquer comment tracer expérimentalement un diagramme de Bode.

Q14. Dans le cas précis du micro de guitare, expliquer pourquoi il n'est pas possible de tracer expérimentalement le diagramme de Bode.

Q15. Un potentiomètre de résistance r est traditionnellement ajouté en parallèle de la capacité C . Donner l'expression littérale du nouveau gain statique du circuit en présence de ce potentiomètre. Ce dernier est accessible pour le guitariste. Quelle est son utilité ?

Partie 2 – Caractérisation de deux micros

On souhaite mesurer les paramètres R , L et C de deux micros différents : le micro **Fender Lace Sensor** et le micro **De Armond Dynasonic**.

En l'absence de vibration de la corde, le micro est modélisé par le dipôle, d'impédance $\underline{Z}$, représenté à la figure 4 gauche.

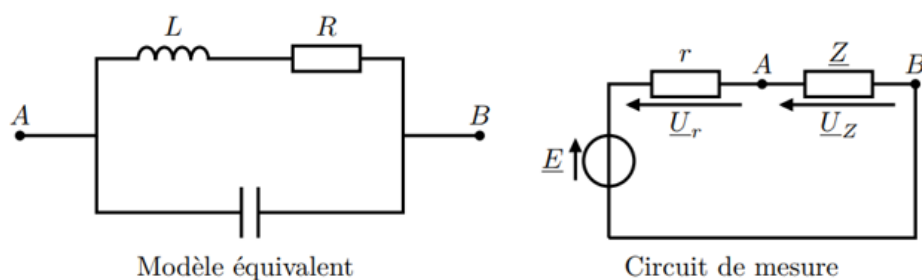


Figure 4 – Modélisation du micro et montage de mesure.

On réalise le montage de la figure 4 à droite, dans lequel e est une source de tension idéale, délivrant une tension sinusoïdale de la forme :

$$e(t) = E \cos(\omega t).$$

r est un résistor de résistance $r = 10 \text{ k}\Omega$.

Q16. Exprimer $\underline{Z}$, l'impédance du micro orienté en convention récepteur, en fonction de R , L , C et ω .

Q17. Montrer que :

$$\underline{Z} = r \frac{U_Z}{U_r}.$$

Q18. Le graphe de la figure 5 représente $\frac{|U_Z|}{|U_r|}$ en fonction de la pulsation ω pour les deux micros étudiés : trait plein pour le micro Fender et pointillés pour le micro Dynasonic.

Montrer qu'en basses fréquences $\underline{Z} \simeq R$ et en déduire la valeur de R pour chaque micro.

Q19. Les relevés expérimentaux mettent en évidence que, pour des fréquences de l'ordre de 1 kHz, $\underline{Z}$ est dominée par R et L .

Montrer que pour ces fréquences :

$$L \simeq \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(r \frac{|U_Z|}{|U_r|}\right)^2 - R^2}.$$

En déduire la valeur de L pour chaque micro.

Q20. $\underline{Z}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Z} = R \frac{1 + jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

Simplifier l'expression de $\underline{Z}$ dans l'hypothèse $Q \gg 1$ et ω proche de ω_0 .

Expliquer comment évaluer C à partir des relevés expérimentaux. En déduire la valeur de C pour chaque micro.

Q21. Justifier, à partir des mesures expérimentales, l'affirmation suivante :

« Le micro Fender sonne plus aigu que le micro Dynasonic. »

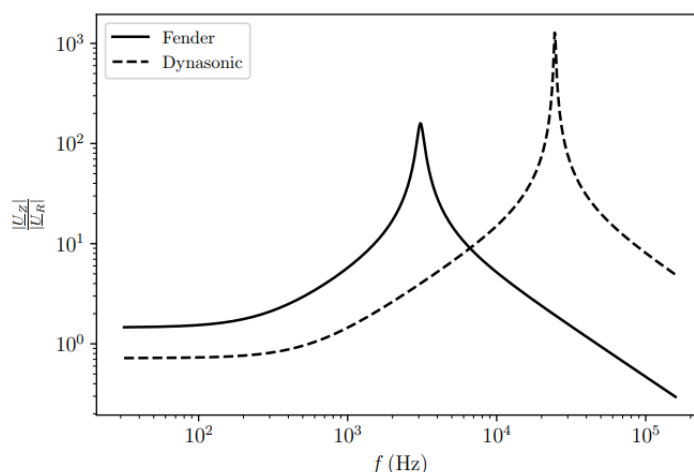


Figure 5 – Relevés expérimentaux des deux micros.

Partie 3 – Numérisation du signal

Le signal fourni par la guitare électrique est finalement numérisé puis traité. On considère dans tout ce qui suit que ce signal est une tension positive comprise entre 0 V (potentiel de la masse) et V_{cc} (potentiel haut). On étudie, en premier lieu, un convertisseur analogique numérique de type flash. Le schéma de la figure 6 représente le circuit électronique d'un convertisseur flash sur deux bits.

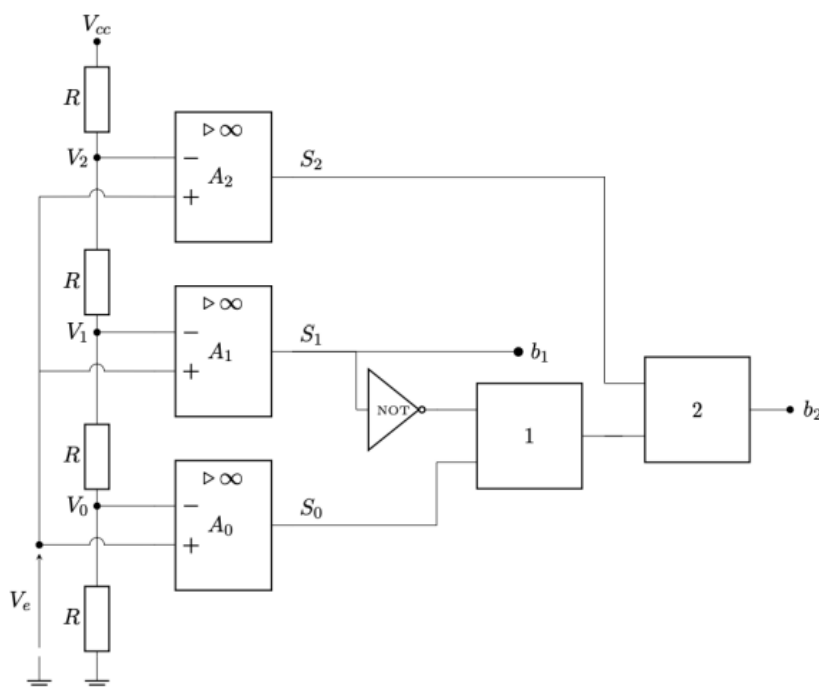


Figure 6 – Convertisseur flash sur deux bits.

Q22. Justifier que les tensions V_0 , V_1 et V_2 valent respectivement :

$$\frac{1}{4}V_{cc}, \quad \frac{1}{2}V_{cc}, \quad \frac{3}{4}V_{cc}.$$

Dans la figure 6, la porte 1 réalise la fonction ET et la porte 2 la fonction OU.

Q23. Reproduire et compléter la table de vérité ci-dessous relative au convertisseur flash.

	S_0	S_1	S_2	b_0	b_1
$0 < V_e < \frac{1}{4}V_{cc}$					
$\frac{1}{4}V_{cc} < V_e < \frac{1}{2}V_{cc}$					
$\frac{1}{2}V_{cc} < V_e < \frac{3}{4}V_{cc}$					
$\frac{3}{4}V_{cc} < V_e$					

Q24. La norme **Hi-Res Audio** des fichiers audios (utilisé dans les fichiers .flac, par exemple) impose un encodage sur 24 bits à une fréquence égale ou supérieure à 96 kHz.

Combien d'amplificateurs linéaires intégrés seraient nécessaires pour réaliser un convertisseur flash sur 24 bits ?

En pratique, il n'existe pas dans le commerce de convertisseur flash sur plus de 12 bits (au-delà, ils seraient trop chers et trop encombrants). On peut, néanmoins, mettre à profit leur grande rapidité de conversion dans des convertisseurs pipeline semi-flash. Prenons l'exemple du convertisseur pipeline 24 bits à trois étages représenté à la figure 7. E/B désigne un circuit échantillonneur bloqueur, CAN un convertisseur analogique numérique flash 8 bits et CNA un convertisseur numérique analogique 8 bits.

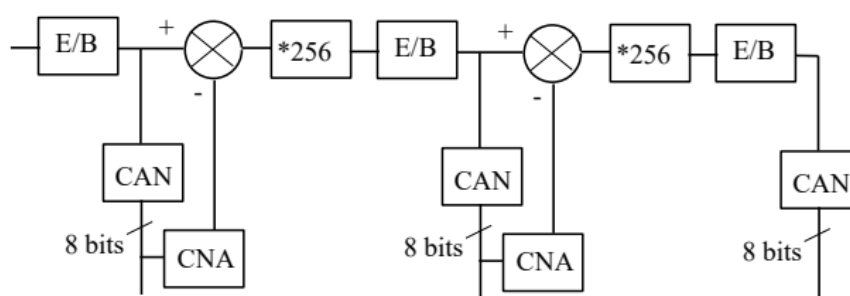


Figure 7 – Convertisseur pipeline 24 bits.

Le premier étage détermine les valeurs des 8 bits de poids fort, l'étage suivant les valeurs des 8 bits suivants, enfin le dernier étage détermine les valeurs des 8 bits de poids faible.

Trois circuits échantillonneurs bloqueurs sont intercalés afin de synchroniser les trois conversions.

Un échantillonneur bloqueur peut être réalisé selon le schéma de la figure 8, dans lequel l'interrupteur K est commandé par une tension crêteau, appelée signal d'horloge, à la fréquence d'échantillonnage f_e .

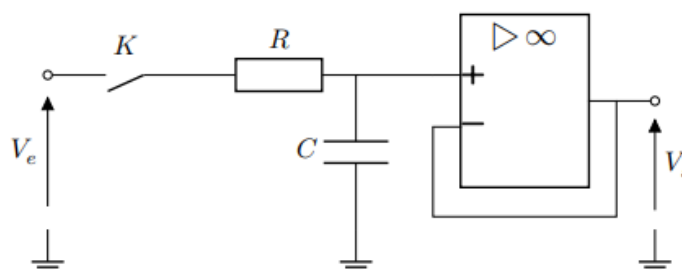


Figure 8 – Échantillonneur bloqueur.

On suppose K fermé et le condensateur initialement déchargé.

De plus, on suppose que les variations temporelles de $V_e(t)$ sont très lentes devant le produit RC .

Q25. Au bout de combien de temps le condensateur atteint-il la tension V_e à 99 % ?

En déduire une contrainte sur le produit RC pour que u_C diffère de V_e de moins de 1 % à chaque front descendant du signal d'horloge.

Q26. Que vaut la tension de sortie lorsque l'interrupteur est ouvert ?

Quel est l'intérêt de ce circuit ?

Q27. La tension d'horloge pilotant l'interrupteur K est réalisée à l'aide du circuit de la figure 9.

L'interrupteur I est fermé pour Q à l'état bas, et ouvert quand Q est à l'état haut et ainsi qu'à la mise sous tension. Tracer le chronogramme de la tension u_C , des entrées R , S et de la sortie Q , en partant de l'état initial :

$$R = 0, \quad S = 1, \quad I \text{ ouvert}, \quad u_C = 0.$$

On tracera l'allure des chronogrammes sans chercher l'expression littérale de u_C au cours du temps.

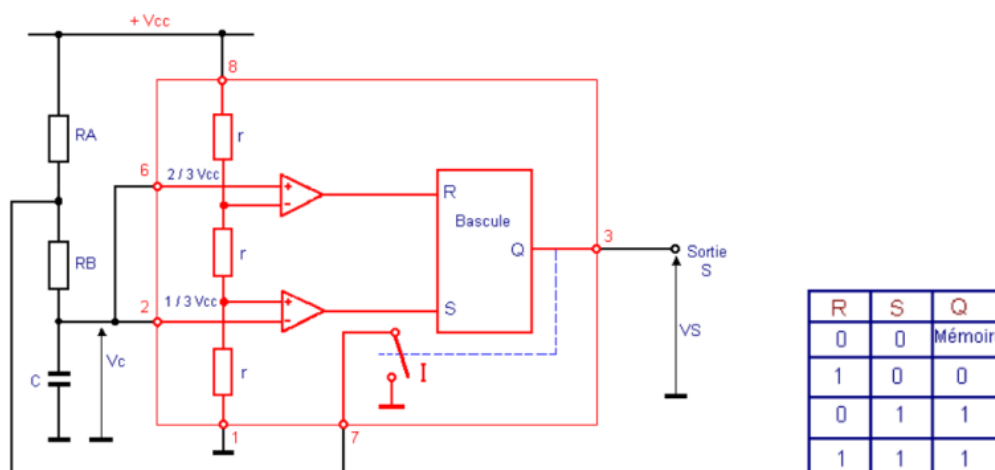


Figure 9 – Circuit de génération du signal d'horloge.

Q28. Comment choisir R_A et R_B pour obtenir un signal d'horloge en forme de peigne (*i.e.* signal créneau pour lequel le temps à l'état haut est faible devant le temps à l'état bas) ?

Q29. Le flanger est un effet sonore obtenu en additionnant au signal d'origine ce même signal mais légèrement retardé.

De plus, ce retard est lentement modulé dans le temps.

Ainsi, pour un signal d'entrée $e(t)$, le signal de sortie est :

$$s(t) = e(t) + e(t + \tau)$$

avec

$$\tau = \tau_0 + \delta\tau \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \delta\tau < \tau.$$

Proposer une fonction Python :

```
phaser(e : list, omega : float,  
       tau : float, dtau : float) -> list
```

qui prend, respectivement, en argument :

- le signal $e(t)$ numérisé à la période d'échantillonnage T_e et stocké sous forme de liste ;
- ω la pulsation de la modulation ;
- τ_0 la valeur moyenne du déphasage ;
- $\delta\tau$ l'amplitude du déphasage ;

et qui renvoie le signal filtré sous forme de liste.

On supposera que e a été enregistré pendant une durée grande devant τ et que la fréquence d'échantillonnage a déjà été définie dans une variable globale f_e .