

DS n°1 : Parcours vert

Exercice n°1 : Communication avec le rover Perseverance, CCINP TSI 2023

Les rovers peuvent communiquer directement avec la Terre via deux antennes à 8 GHz mais aussi avec les sondes orbitales, appelées orbiters et situées à 400 km en orbite autour de Mars. Ces sondes orbitales transmettent les données reçues à la Terre lorsque celle-ci est dans le champ de leur antenne. Ainsi, les rovers économisent de l'énergie.

Bien que la technologie ait évolué considérablement dans ce domaine, historiquement, l'émission et la réception d'ondes ont été possibles grâce à l'association de simples dipôles passifs.

Avant transmission des signaux, il est nécessaire d'étudier l'alimentation de l'antenne émettrice. Même si les circuits utilisés dans la réalité sont plus élaborés, historiquement, on a pu obtenir un courant oscillant grâce à un circuit comprenant une bobine et un condensateur. La tension aux bornes de ce dernier pourra alimenter une antenne émettrice. C'est dans ce contexte que nous étudierons ces dipôles.

On considère ici un circuit RLC schématisé en figure 1. Le condensateur est initialement déchargé et le circuit est alimenté par une source de tension continue notée E .

On considère les valeurs suivantes : $R = 2,0 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$ et $L = 40 \text{ mH}$.

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

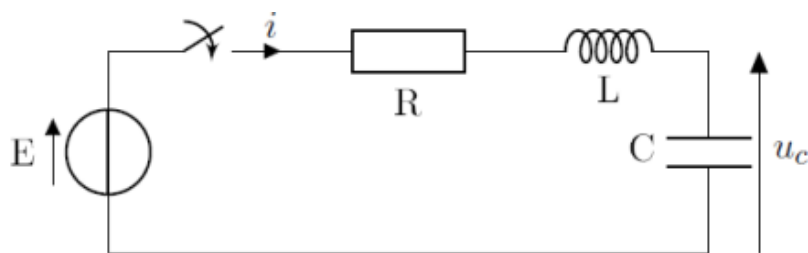


Figure 1 - Circuit RLC alimenté par une tension continue

Q1 - Déterminer la tension aux bornes du condensateur $u_C(0^+)$ et l'intensité dans le circuit $i(0^+)$ juste après la fermeture de l'interrupteur. Justifier.

Q2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$.

Q3 - En écrivant cette équation sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E,$$

en déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q .

Q4 - Déterminer la valeur de la fréquence propre f_0 . Faire l'application numérique à un chiffre significatif (faire l'approximation $\pi \approx 3$).

Q5 - Déterminer la valeur du facteur de qualité Q . Préciser le régime d'oscillation associé à cette valeur.

On remplace la source de tension continue par une source de tension sinusoïdale

$$e(t) = E \cos(\omega t)$$

où ω désigne la pulsation.

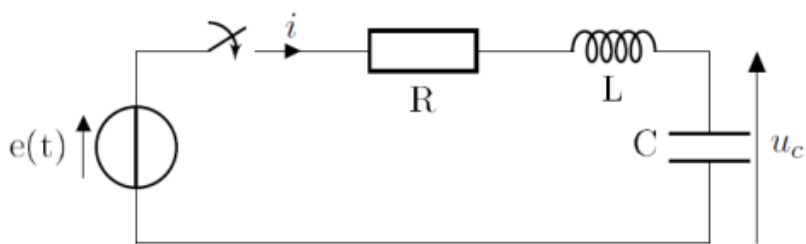


Figure 2 - Circuit RLC alimenté par une tension variable

Q6 - Sachant que l'impédance équivalente à une association en série des dipôles R et L est donnée par :

$$\underline{Z} = R + jL\omega,$$

déterminer l'expression de l'impédance équivalente $\underline{Z}_{eq}$ à l'association en série des trois dipôles R, L et C.

Q7 - Sachant que l'intensité dans le circuit s'écrit

$$i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$$

où φ désigne la phase à l'origine, donner l'écriture complexe de la tension aux bornes du générateur $\underline{e}(t)$ et de l'intensité dans le circuit $\underline{i}(t)$.

Q8 - Déterminer, grâce aux questions précédentes, l'expression de l'amplitude de l'intensité I en fonction de E , R , L , C et de ω .

Q9 - En déduire l'expression de la fréquence d'oscillation pour laquelle l'amplitude de l'intensité I qui alimente l'antenne sera maximale. Donner alors l'expression de cette intensité maximale I_{max} en fonction de E et de R .

Dans les questions suivantes, nous allons étudier la transmission d'information directe entre le rover sur Mars et la Terre.

Q10 - Mars s'éloigne de la Terre à la distance maximale d'environ 300 millions de km. Estimer la durée τ nécessaire à un signal radio pour parcourir cette distance. Conclure.

Nous pouvons nous demander pourquoi ne pas avoir installé de caméra HD sur le rover. Une image 4K de taille 4096×2160 pixels (que l'on pourra approximer à 4000×2000 pixels) est codée sur 32 bits par pixel et le débit moyen utilisé pour la transmission est de $0,25 \text{ Moctet s}^{-1}$.

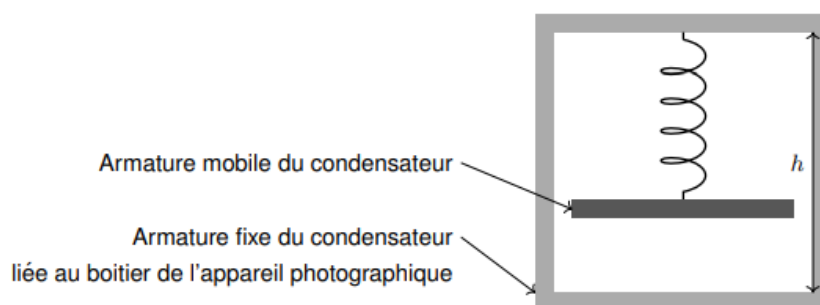
Q11 - Calculer le poids d'une image 4K en Mo (on prendra $1 \text{ Mo} = 10^6$ octets).

Q12 - Calculer la durée nécessaire pour obtenir une vidéo de 1 seconde avec une cadence de 24 images par seconde envoyée depuis Mars vers la Terre. Commenter.

Exercice n°2 : Accéléromètre à détection capacitive, EPITA MPI 2026

1. Filtrage mécanique

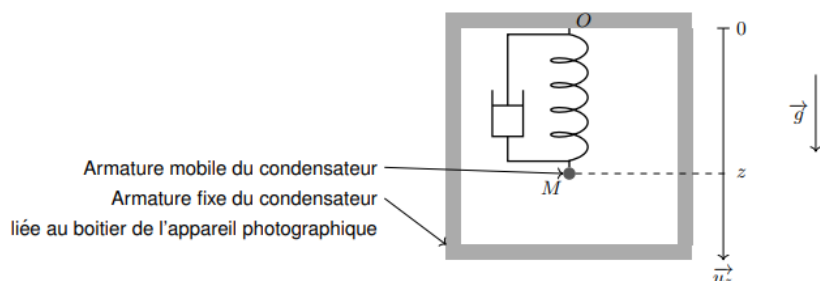
L'intégralité des appareils photographiques numériques modernes sont équipés d'accéléromètres afin de stabiliser l'image lors d'une prise de vue. Cet outil est particulièrement utile lors d'une photographie réalisée avec une grande focale afin de compenser les tremblements de la main du photographe. On se propose d'étudier ici un accéléromètre à détection capacitive. Un conducteur suspendu par un ressort constitue l'armature mobile d'un condensateur, tandis que le boîtier de l'appareil photographique (supposé fixe) porte la seconde armature composant le condensateur. La mesure de la capacité du condensateur permet d'estimer le mouvement engendré par les tremblements du photographe. On note h la hauteur totale de la cavité dans laquelle l'armature mobile est libre de se déplacer.



On modélise mécaniquement l'armature mobile par une masse ponctuelle M de masse m , suspendue à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée en O , un point solide de l'appareil photographique. Le système d'amortissement est modélisé par une force de frottement de la forme

$$\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$$

avec $\vec{v}$ la vitesse du point M par rapport au boîtier de l'appareil photographique.



On cherche à exprimer l'amplitude des vibrations, notée Z_M , engendrées par les tremblements de la main du photographe. Les tremblements de la main du photographe sont modélisés par un mouvement sinusoïdal vertical du point O avec une pulsation ω et une amplitude Z_O :

$$z_O(t) = Z_O \cos(\omega t).$$

La position de la masse M est repérée dans le référentiel de l'appareil photographique par sa position verticale z .

Q13 - On note z_{eq} la position d'équilibre de la masse M dans le référentiel de l'appareil photographique. Déterminer son expression en fonction de la longueur à vide l_0 du ressort, de la masse m de l'armature mobile, de l'intensité du champ de pesanteur terrestre g et de la constante de raideur k .

Q14 - Établir l'équation différentielle du mouvement de la masse M dans le référentiel de l'appareil photographique. L'équation fera apparaître le coefficient de frottement α , la constante de raideur k , la masse m , la position d'équilibre z_{eq} , la pulsation ω et l'amplitude Z_O .

Indication : le mouvement du point de fixation O influence uniquement l'accélération totale qui s'écrit donc

$$a = \ddot{z} + \ddot{z}_O.$$

Dans la suite on note $Z = z - z_{eq}$ la position de la masse M par rapport à sa position d'équilibre.

Q15 - Montrer que l'équation du mouvement de M peut se mettre sous la forme

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = Z_O \omega^2 \cos(\omega t).$$

Donner l'expression des paramètres ω_0 et Q .

On s'intéresse désormais au mouvement de la masse M en régime sinusoïdal permanent établi.

Q16 - Justifier que la quantité $Z(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$Z(t) = Z_M \cos(\omega t + \phi).$$

Que sont les quantités Z_M , ω et ϕ ?

Q17 - À l'aide d'un passage aux complexes, exprimer Z_M en fonction de Z_O , Q et de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

Q18 - Quelle est la nature du filtre associé à $Z_M(x)$?

Q19 - Montrer que $Z_M(x)$ passe par un maximum en $x = x_r$ si $Q > 1/\sqrt{2}$ et préciser l'expression de x_r .

Q20 - Étudier les asymptotes basse et haute fréquences de $Z_M(x)$ puis tracer sur un même graphique l'allure de la courbe $Z_M(x)$ pour $Q_1 < 1/\sqrt{2}$ et $Q_2 > 1/\sqrt{2}$.

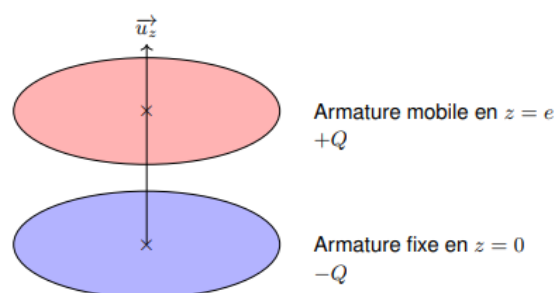
Q21 - La main d'un photographe vibre de 2 mm à une fréquence de 10 Hz, quelle est l'amplitude du mouvement du capteur Z_M dans ces conditions ?

On prendra $\omega_0 = 2 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$ et $Q = 20$ pour l'application numérique.

2. Capacité du capteur

L'armature mobile et l'armature fixe forment un condensateur représenté ci-contre. L'armature fixe située en $z = 0$ porte une charge $-Q$ et un potentiel V_1 tandis que l'armature mobile située en $z = e$ porte une charge $+Q$ et un potentiel V_2 .

Les charges sont supposées uniformément réparties sur la surface S des armatures de diamètre largement supérieur à l'épaisseur e du condensateur, on peut ainsi négliger les effets de bords.



Le potentiel interarmature est décrit par la fonction V .

Q22 - En justifiant précisément les invariances et les symétries de la distribution de charges, déterminer la direction du champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé et les coordonnées dont il dépend.

Q23 - À l'aide du théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrique créé par un plan infini portant une densité surfacique de charge σ .

Q24 - En assimilant les armatures du condensateur à deux plans infinis portant respectivement les densités surfaciques de charge $+\sigma$ et $-\sigma$, appliquer le principe de superposition pour déterminer le champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures.

Q25 - Rappeler la relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V . En intégrant cette relation, déterminer l'expression du potentiel électrostatique $V(z)$ entre les armatures.

Q26 - En utilisant la relation entre la charge Q portée par une armature et la différence de potentiel entre les armatures, déterminer l'expression de la capacité C du condensateur plan.

Ainsi les vibrations du boîtier de l'appareil photographique entraînent une évolution sinusoïdale de la capacité du condensateur de la forme

$$C(t) = \frac{\epsilon_0 S}{e(t)} = \frac{\epsilon_0 S}{h - z(t)} \simeq \frac{\epsilon_0 S}{h} \left(1 + \frac{z(t)}{h} \right).$$

avec

$$z(t) = Z(t) + z_{eq} = z_{eq} + Z_M \cos(\omega t + \phi).$$

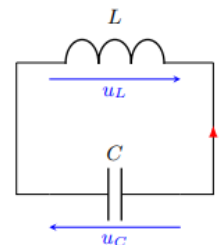
Mesurer la capacité C de l'accéléromètre permet donc d'estimer les vibrations du boîtier de l'appareil photographique afin de corriger le mouvement du capteur et stabiliser l'image lors d'une prise de vue.

Q27 - Estimer les valeurs extrêmes atteintes par la capacité C , on prendra une amplitude de variation $Z_M = 2 \mu m$ dans une cavité de hauteur totale $h = 10 \mu m$ avec une altitude d'équilibre de l'armature mobile $z_{eq} = 5 \mu m$. On rappelle que $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ et on prendra $S = 4 \times 10^{-8} \text{ m}^2$.

Données numériques utiles à la question : $8,85 \times 4 = 35,4$; $3,54 \times 1,3 \simeq 4,6$ et $3,54 \times 1,7 \simeq 6,0$.

3. Mesure de capacité

Une mesure directe de capacité n'est pas chose simple. Afin de mesurer la capacité de l'accéléromètre, ce dernier est associé à une bobine d'inductance L afin de former un oscillateur LC dont la fréquence des oscillations dépend de la capacité C de l'accéléromètre, capacité qui est elle-même liée aux vibrations du boîtier engendrées par les tremblements de la main du photographe.



Q28 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.

Q29 - Exprimer la fréquence des oscillations du signal u_C en fonction de la capacité C de l'accéléromètre.

Q30 - On suppose que, lors de l'utilisation de l'appareil photographique, la capacité varie faiblement autour de sa valeur en l'absence de vibration C_0 de telle façon que $C = C_0 + \Delta C$ avec $\Delta C \ll C_0$. Montrer à l'aide d'un développement limité que l'on peut écrire

$$f = f_0 \left(1 - \frac{\Delta C}{2C_0} \right)$$

en précisant l'expression de f_0 en fonction de L et C_0 .

Dans le cas des faibles variations de la capacité de l'accéléromètre, la fréquence du signal de tension mesuré aux bornes du condensateur varie avec une fréquence

$$f(t) = f_0 \left(1 - \frac{z(t) - z_{eq}}{2z_{eq}} \right) = f_0 \left(1 - \frac{Z_M}{2z_{eq}} \cos(\omega t + \phi) \right).$$

Q31 - On cherche à numériser ce signal de fréquence variable, exprimer la fréquence d'échantillonnage minimale respectant le critère de Shannon à tout instant.

La difficulté d'une telle situation est que l'on cherche à accéder à la fréquence de variation de la fréquence. Extraire cette information peut se faire à l'aide, par exemple, d'une boucle à verrouillage de phase afin de remonter à la fréquence instantanée du signal.

On définit cette fréquence par :

$$f_{ins}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}$$

avec $\phi(t)$ la phase du signal en tension mesuré aux bornes du condensateur.

$$u_C(t) = U_0 \cos(\phi(t)) = U_0 \cos(2\pi f(t)t) = U_0 \cos \left(2\pi f_0 \left(1 - \frac{Z_M}{2z_{eq}} \cos(\omega t + \phi) \right) t \right).$$

Q32 - Déterminer l'expression de la fréquence instantanée.

En pratique, cette fréquence est estimée à l'aide d'un microcontrôleur contenant une horloge interne de fréquence $f_m = 14 \text{ MHz}$. Le microcontrôleur mesure la fréquence en comptant le nombre N d'impulsions de son horloge pendant une période du signal issu de l'oscillateur de fréquence f_{ins} .

Q33 - Exprimer la période des vibrations engendrées par les tremblements de la main du photographe en fonction de N et f_m . Quelle est la valeur de N attendue pour $f_{ins} = 700 \text{ kHz}$?

Q34 - L'incertitude de mesure du nombre de déclenchements du timer est $\Delta N = 1$, tandis que l'incertitude sur la fréquence de l'horloge du microcontrôleur est $\Delta f_m = 1 \text{ kHz}$. Exprimer l'incertitude relative sur la mesure de la fréquence de la tension aux bornes du condensateur de l'oscillateur. Commenter le résultat obtenu et proposer une façon de réduire cette incertitude.