

Devoir maison n°2

Point de cours : Densité volumique d'énergie électromagnétique

Les champs électrostatique et magnétostatique stockent de l'énergie dans l'espace. On définit la **densité volumique d'énergie magnétique** u_m et la **densité volumique d'énergie électrique** u_e comme l'énergie stockée respectivement par le champ magnétique et électrique par unité de volume, exprimée en J m^{-3} .

Leurs expressions sont admises conformément au programme. Dans le vide :

$$u_m(M) = \frac{\|\vec{B}(M)\|^2}{2\mu_0}, \quad u_e(M) = \frac{\varepsilon_0}{2} \|\vec{E}(M)\|^2,$$

où μ_0 et ε_0 sont respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité électrique du vide.

Un volume élémentaire $d\tau$ contient l'énergie $dU = u(M) d\tau$. L'énergie totale dans un volume $\mathcal{V}$ s'obtient en sommant ces contributions :

$$U_m = \iiint_{\mathcal{V}} u_m(M) d\tau, \quad U_e = \iiint_{\mathcal{V}} u_e(M) d\tau.$$

(Ces notions seront approfondies dans le chapitre : EM3 – Champ électromagnétique.)

Exercice n°1 : Le câble coaxial

On considère un câble coaxial constitué d'un cylindre métallique central plein, de rayon R_1 , appelé **âme**, et d'une couche cylindrique périphérique, de rayon interne R_2 et de rayon externe R_3 , appelée **gaine**.

Entre R_1 et R_2 se trouve une matière isolante assimilable au vide du point de vue électromagnétique. Ce câble est rectiligne d'axe $(O, \vec{u}_z)$ et considéré comme infiniment long. On note r la distance d'un point M à l'axe du câble.

On étudie successivement deux situations : le câble en circuit fermé, parcouru par un courant constant (Partie n°1), puis le câble en circuit ouvert, chargé uniformément (Partie n°2). Ces études permettent de déterminer respectivement son inductance linéique et sa capacité linéique.

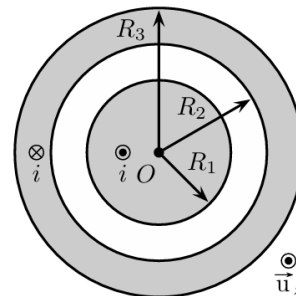


Figure 1 – Câble coaxial vu en coupe.

Partie n°1 : Étude magnétostatique

Dans cette partie, l'âme transporte une intensité i constante, dirigée selon $+\vec{u}_z$, et la gaine transporte une intensité i dans le sens $-\vec{u}_z$. Dans chacune des deux parties conductrices, la densité de courant est d'abord supposée uniforme.

Q1. Montrer que le champ magnétique créé par ce câble en un point M quelconque se met sous la forme $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur à préciser.

Q2. Déterminer l'expression de $B(r)$ pour $r \in [0, +\infty[$. Tracer $B(r)$.

Pour la suite de cette partie, on adopte un modèle de **courants surfaciques** : les courants sont cantonnés dans de très faibles épaisseurs au voisinage des surfaces de rayons R_1 et R_2 .

Q3. Que devient le graphe de $B(r)$? Commenter les discontinuités qui apparaissent.

Q4. À l'aide du point de cours, exprimer l'énergie magnétique U_m contenue dans une portion de longueur ℓ du câble.

- Q5.** On rappelle que l'énergie magnétique stockée dans une bobine d'inductance propre L , parcourue par un courant d'intensité i , s'écrit : $U_m = \frac{1}{2} Li^2$.

En déduire l'inductance propre L de cette portion de câble, puis son inductance linéique propre : $\Lambda \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{L}{\ell}$.

Préciser l'unité de Λ .

- Q6.** Calculer numériquement L pour $R_1 = 1,0 \text{ cm}$, $R_2 = 2,0 \text{ cm}$ et $\ell = 1,0 \text{ m}$. On prendra $\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$.

Partie n°2 : Étude électrostatique

Dans cette partie, aucun courant ne circule. L'âme et la gaine, supposées parfaitement conductrices, sont chargées et à l'équilibre électrostatique : elles constituent les deux armatures d'un condensateur.

Les charges sont réparties uniformément sur les surfaces cylindriques de rayons R_1 et R_2 , avec des densités surfaciques respectives $\sigma_1 > 0$ et σ_2 . Sur une portion de longueur ℓ , l'âme porte une charge $Q > 0$ et la gaine une charge $-Q$: le câble est donc globalement neutre. La surface extérieure de rayon R_3 ne porte aucune charge.

On néglige les effets de bord et on utilise le modèle du câble infiniment long pour déterminer le champ électrostatique.

- Q7.** Exprimer la charge Q en fonction de σ_1 , R_1 et ℓ . En utilisant la neutralité du câble à l'équilibre électrostatique, déterminer la relation entre σ_1 et σ_2 .
- Q8.** En étudiant les symétries et les invariances de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique entre les deux armatures se met sous la forme : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$.
- Q9.** À l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique pour $R_1 < r < R_2$, en fonction de Q , ℓ , ϵ_0 et r . Justifier également que le champ est nul dans les conducteurs et à l'extérieur du câble.
- Q10.** À l'aide du point de cours placé avant l'exercice, exprimer l'énergie électrique U_e contenue dans une portion de longueur ℓ du câble, en fonction de Q , ℓ , ϵ_0 , R_1 et R_2 .
- Q11.** On note $U = V_1 - V_2$ la différence de potentiel entre l'âme et la gaine. On rappelle que l'énergie électrique stockée dans un condensateur s'écrit : $U_e = \frac{1}{2} CU^2$.

Rappeler la définition de la capacité C d'un condensateur en fonction de la charge Q et de la différence de potentiel U . En déduire l'expression de la capacité C , puis de la capacité linéique du câble : $\Gamma \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{C}{\ell}$.

Préciser l'unité de Γ .

- Q12.** Calculer numériquement C pour $R_1 = 1,0 \text{ cm}$, $R_2 = 2,0 \text{ cm}$ et $\ell = 1,0 \text{ m}$. On prendra $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$.

Ouverture : Propagation des ondes électromagnétiques dans le câble

Les deux études précédentes caractérisent le stockage d'énergie magnétique et électrique dans le même câble. **Lorsqu'il transmet un signal variable, des charges et des courants variables sont présents simultanément** : les champs électrique et magnétique sont alors couplés, et le signal se propage à une vitesse finie. Nous montrerons dans un prochain chapitre que, dans le modèle idéal d'un câble sans pertes, la célérité de propagation des ondes vaut :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$$

Avec l'inductance linéique obtenue dans le modèle des courants surfaciques et la capacité linéique calculée dans la seconde partie, on obtient :

$$\Lambda \Gamma = \mu_0 \epsilon_0, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

En utilisant les valeurs numériques de μ_0 et ϵ_0 :

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7}) \times (8,85 \times 10^{-12})}} \simeq 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

On trouve que les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide, notée c . Dans un câble réel, la prise en compte des propriétés de l'isolant entre l'âme et la gaine conduisent à une célérité inférieure.

Exercice n°2 : Transport de dioxygène dans le sang

Dans l'organisme, l'hémoglobine du sang permet le transport du dioxygène des poumons vers les organes. On étudie par la suite un modèle simplifié des transformations chimiques liées à ce transport.

Le sang est assimilé à une solution aqueuse. Une sous-unité constitutive de l'hémoglobine sera notée $\text{Hb}_{(aq)}$, et le dioxygène dissous dans le sang $\text{O}_{2(aq)}$.

Au niveau des poumons, une sous-unité d'hémoglobine fixe une molécule de dioxygène pour donner une sous-unité d'oxyhémoglobine. L'équation de la réaction associée à cette transformation chimique est :



La constante d'équilibre associée vaut $K_1 = 3,0 \times 10^5$ à la température d'étude.

Donnée : masse molaire d'une sous-unité d'hémoglobine :

$$M_{\text{Hb}} = 1,6 \times 10^4 \text{ g mol}^{-1}.$$

Q1. À l'état initial, on suppose qu'un volume $V = 100 \text{ mL}$ de sang contient une masse $m = 15 \text{ g}$ de sous-unités d'hémoglobine et une concentration initiale en dioxygène dissous égale à :

$$[\text{O}_2]_i = 9,2 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1}.$$

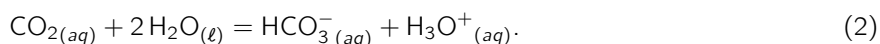
On suppose qu'il n'y a initialement pas d'oxyhémoglobine. Calculer la concentration finale en sous-unités d'oxyhémoglobine dans le sang.

Q2. Ce volume V de sang arrive au niveau des tissus des organes. À ce stade, une partie du dioxygène dissous est absorbée par les tissus, faisant ainsi chuter sa concentration dans le sang jusqu'à :

$$[\text{O}_2] = 3,6 \times 10^{-5} \text{ mol L}^{-1}.$$

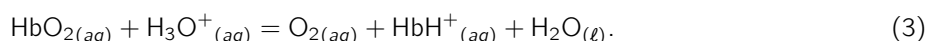
Dans quel sens évolue le système ? Justifier.

Q3. Au cours d'un effort, du dioxyde de carbone est formé au niveau des muscles et se dissout dans le sang. Il réagit avec l'eau selon l'équation :



Pourquoi la dissolution du dioxyde de carbone provoque-t-elle une diminution du pH sanguin en l'absence d'autres réactions ?

Q4. Chez l'être humain, le pH du sang est compris dans des limites très étroites : 7,36 à 7,42. D'autre part, l'oxyhémoglobine peut réagir avec les ions oxonium selon l'équation :



Montrer que les ions $\text{H}_3\text{O}^+_{(aq)}$ produits par la réaction (2) permettent la libération du dioxygène nécessaire à l'effort musculaire, tout en limitant la variation de pH liée à la dissolution du dioxyde de carbone.

Q5. La combustion d'une substance contenant du carbone produit du monoxyde de carbone dans certaines conditions, par exemple dans les poêles ou fourneaux mal aérés, ou dans la fumée de cigarettes.

L'équation associée à la réaction entre le monoxyde de carbone et une sous-unité d'hémoglobine s'écrit :



avec $K_4 = 7,5 \times 10^7$.

Le tableau suivant donne, dans le cadre de ce modèle, les effets sur l'organisme associés aux valeurs du rapport des concentrations à l'équilibre :

$$\frac{[\text{HbCO}]_{\text{eq}}}{[\text{Hb}]_{\text{eq}}}.$$

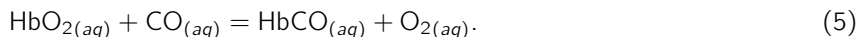
$\frac{[\text{HbCO}]_{\text{eq}}}{[\text{Hb}]_{\text{eq}}}$	De $1,1 \times 10^4$ à $2,6 \times 10^4$	De $2,6 \times 10^4$ à $2,6 \times 10^5$	$> 2,6 \times 10^5$
Effets	Maux de tête	Intoxication grave	Mort rapide

L'analyse du sang d'une personne ayant respiré de l'air pollué par du monoxyde de carbone a révélé une concentration en monoxyde de carbone dissous dans le sang égale à :

$$[\text{CO}]_{\text{eq}} = 2,0 \times 10^{-4} \text{ mol L}^{-1}.$$

Quels sont les effets ressentis par la personne d'après le tableau ?

- Q6.** Au sein de l'organisme, il y a compétition entre le dioxygène et le monoxyde de carbone pour se fixer sur l'hémoglobine, selon les réactions (1) et (4). On atteint un état d'équilibre correspondant à l'équation :



Donner l'expression de la constante d'équilibre K_5 associée à la réaction (5) en fonction des concentrations à l'équilibre. L'exprimer ensuite en fonction de K_1 et K_4 , puis calculer sa valeur.

- Q7.** Une personne empoisonnée au monoxyde de carbone est placée dans un caisson hyperbare dans lequel on impose une pression partielle élevée en dioxygène, permettant d'augmenter la concentration en dioxygène dissous dans le sang.

Expliquer qualitativement l'action du caisson hyperbare sur l'équilibre associé à la réaction (5).