

Questions de cours : Magnétostatique et induction (MP2I)

- 1) Expliciter le cadre de la magnétostatique. Définir le vecteur densité de courant volumique et son unité. Préciser le lien entre cette grandeur et l'intensité du courant électrique.
- 2) Énoncer le théorème d'Ampère, appliquer la méthode complète pour déterminer l'expression du champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infini de rayon R et parcouru par un courant I .
- 3) Expliquer le lien entre les symétries de la distribution de courants et celle du champ magnétostatique. Illustrer votre propos avec un schéma. Expliciter la signification de la phrase suivante : « Le champ magnétostatique est à flux conservatif ».
- 4) Appliquer la méthode complète pour déterminer l'expression du champ magnétostatique créé par un solénoïde infini de rayon (R), comptant (n) spires par unité de longueur, chacune parcourue par le même courant (I).
- 5) Écrire la loi de Lenz (induction). Définir l'inductance propre d'un circuit en explicitant la signification et les unités des différents termes de l'équation. Utiliser cette définition pour retrouver la relation tension-courant d'une bobine idéale et compléter son expression en la présence d'un couplage par mutuelle inductance.

Exercices : Magnétostatique et induction (MP2I)

1) Solénoïde

On considère un solénoïde idéal, assimilé à une répartition continue de spires circulaires jointives de rayon R , d'axe (Oz), comportant n spires par unité de longueur. Chaque spire est parcourue par un courant d'intensité I constante. Le solénoïde est placé dans le vide, de perméabilité magnétique μ_0 . Le sens du courant est choisi de sorte que le champ magnétique créé sur l'axe soit orienté suivant $+\vec{e}_z$. On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Dans cette partie, le solénoïde est supposé infini. On admet que le champ magnétique tend vers le vecteur nul lorsque la distance à l'axe tend vers l'infini.

1. À l'aide des symétries et des invariances de la distribution de courant, déterminer la direction du champ magnétique et les variables dont il dépend.
2. Énoncer le théorème d'Ampère. En l'appliquant à des contours judicieusement choisis, déterminer le champ magnétique à l'extérieur puis à l'intérieur du solénoïde. Représenter l'allure des lignes de champ.

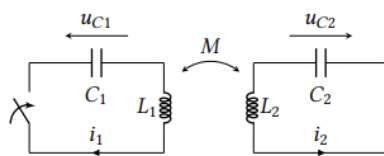
On considère désormais un solénoïde de longueur ℓ très grande devant R , comportant $N = n\ell$ spires et de section $S = \pi R^2$. On néglige les effets de bord et on utilise le champ obtenu dans la partie A.

3. Orienter les surfaces des spires conformément au sens du courant. Calculer le flux du champ magnétique à travers une spire, puis le flux propre total Φ_p enlacé par les N spires.
4. Rappeler la définition de l'inductance propre L . En déduire son expression en fonction de μ_0 , n , ℓ et S , puis en fonction de μ_0 , N , ℓ et S .

5. L'énergie magnétique stockée dans le solénoïde a pour expression : $U_m = \frac{1}{2} L I^2$

À partir de l'expression de L obtenue précédemment, en déduire la densité volumique d'énergie magnétostatique u_m dans le solénoïde, en fonction de $B = \|\vec{B}\|$ et de μ_0 . Préciser son unité.

2) Circuits LC couplés par mutuelle



Dans le circuit ci-contre, seul le condensateur C_1 est chargé sous la tension U_0 à la date $t = 0$ où l'on ferme l'interrupteur. On suppose $C_1 = C_2 = C$ et $L_1 = L_2 = L$, et on pose

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}}$$

- 1 - Établir deux équations différentielles couplées sur les tensions u_{C1} et u_{C2} aux bornes des condensateurs.
- 2 - En déduire deux équations sur les fonctions somme $\Sigma(t) = u_{C1} + u_{C2}$ et différence $\Delta(t) = u_{C1} - u_{C2}$.
- 3 - Exprimer la tension u_{C1} sous forme d'un produit de cosinus.
- 4 - On suppose le couplage inductif faible ($M \ll L$). Déterminer le coefficient $\beta \ll 1$ tel que $\omega_{1,2} \approx \omega_0(1 \pm \beta)$.
- 5 - Réécrire l'expression de u_{C1} en fonction de β et ω_0 , et tracer son allure.

3) Réponse à un échelon de circuits couplés

Considérons le montage de la figure 2 dans lequel les deux bobines L_1 et L_2 sont couplées par induction mutuelle. Les deux bobines ont même résistance interne $r_1 = r_2 = 15 \Omega$.

- 1 - Donner les relations entre les tensions u_1 et u_2 et les courants i_1 et i_2 .

Le circuit secondaire est en circuit ouvert. On ajoute en série au circuit primaire un générateur de tension de résistance interne $r_g = 50 \Omega$, qui impose une tension crête de valeur minimale nulle, et une résistance additionnelle $R_0 = 100 \Omega$. La figure 3 représente la tension u aux bornes de R_0 mesurée à l'oscilloscope.

- 2 - Interpréter le terme « en circuit ouvert » et en déduire l'équation différentielle sur i_1 .
- 3 - En expliquant la méthode, déterminer L_1 .
- 4 - On donne $M = 0,1 \text{ H}$. Représenter $u_2(t)$.

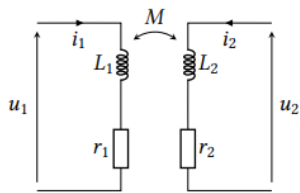


Figure 2 – Bobines couplées.

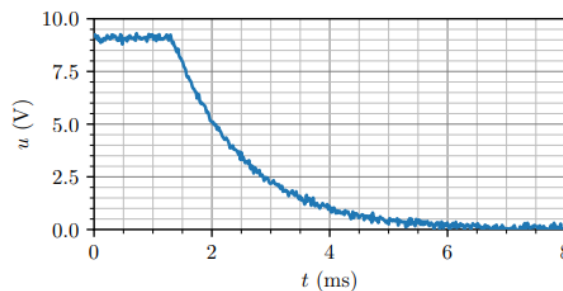


Figure 3 – Tensions aux bornes de la résistance R_0 .

4) Génératrice synchrone d'éolienne

Dans une éolienne, la génératrice électrique est une machine synchrone, constituée de bobinages fixes soumis à un champ magnétique tournant. On adopte un modèle très simplifié, en considérant que le bobinage équivaut à N spires jointives de rayon a , plongées dans un champ magnétique créé par un aimant permanent en rotation à la vitesse ω , voir figure 1, de la forme

$$\vec{B}(t) = B_0(\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y).$$

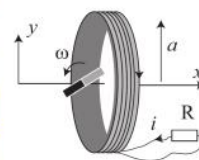
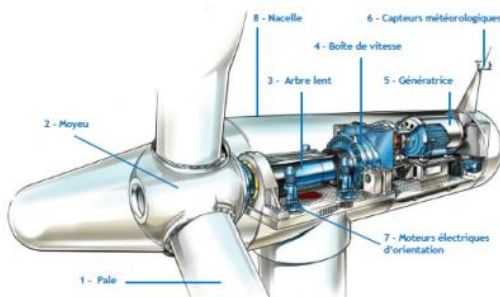


Figure 1 – Éolienne. La rotation des pales de l'éolienne permet de mettre en rotation le rotor (partie tournante) d'une génératrice située à l'intérieur de la nacelle. Des aimants permanents fixés sur le rotor créent alors un champ tournant, et par induction une tension dans les bobinages du stator (partie fixe) de la génératrice. La transmission par une boîte de vitesse permet d'augmenter la vitesse de rotation du rotor par rapport à celle des pales.

- 1 - Montrer que le flux magnétique au travers de la bobine s'écrit $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$, avec Φ_0 une constante à exprimer.
- 2 - On modélise le réseau électrique alimenté par l'éolienne par une simple résistance R , et on néglige l'inductance propre de la bobine. Exprimer le courant $i(t)$.
- 3 - Calculer la puissance moyenne dissipée dans la résistance. On rappelle $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$.