

□ Exercice 8.1. Coup franc ! ★★

1. La seule force exercée sur le ballon pendant son mouvement est son poids. Ainsi, d'après la deuxième loi de Newton, $\vec{a} = \vec{g}$. Par projection, cela donne :

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t$$

En remplaçant t par x via l'équation du mouvement selon (Ox) , l'équation de la trajectoire est :

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x$$

2. Le ballon passe au-dessus du mur si $y(x_{\text{mur}}) > 1,90$. Après calcul :

$$y(x_{\text{mur}}) = 2,17 \text{ m} \quad (\text{le ballon passe au-dessus}).$$

3. Le tir est cadré si $y(x_{\text{but}}) < 2,44$. Après calcul :

$$y(x_{\text{but}}) = 1,73 \text{ m} \quad (\text{le tir est cadré}).$$

4. En tenant compte de la force de frottement $\vec{F}$, la deuxième loi de Newton devient :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

Les équations différentielles pour x et y s'écrivent :

$$\tau \frac{dv_x}{dt} + v_x = 0, \quad \tau \frac{dv_y}{dt} + v_y = -\tau g$$

Après intégration et prise en compte des conditions initiales :

$$v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)e^{-t/\tau}, \quad v_y(t) = (v_0 \sin(\alpha) + g\tau)e^{-t/\tau} - g\tau$$

Les expressions horaires deviennent, après prise en compte des conditions initiales :

$$x(t) = v_0 \tau \cos(\alpha)(1 - e^{-t/\tau}), \quad y(t) = (v_0 \tau \sin(\alpha) + g\tau^2)(1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t$$

5. L'équation de la trajectoire est :

$$y(x) = \left(\tan(\alpha) + \frac{g\tau}{v_0 \cos(\alpha)} \right) x + g\tau^2 \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos(\alpha)} \right)$$

6. Le ballon passe au-dessus du mur : $y(x_{\text{mur}}) = 2,17 \text{ m}$.

7. Le tir est cadré : $y(x_{\text{but}}) = 1,73 \text{ m}$. On constate que les frottements ont peu d'influence sur ce mouvement (car il n'est pas très rapide donc la force de frottement est restée assez faible).

□ Exercice 8.2. Pendule simple ★★

1. Le système étudié est un point matériel M de masse m . Le PFD s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$$

Par projection dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

Pour des petits angles θ , l'équation devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

En posant $\tau = \frac{2m}{\alpha}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$, on obtient l'équation demandé.

2. a. L'équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$$

Le régime est pseudo-périodique si $\omega_0 > \frac{1}{\tau}$ (discriminant négatif).

- b. τ est un temps de relaxation, indiquant la durée du régime transitoire.

□ Exercice 8.3. Spectromètre de masse ★★

1 Les protéines sont chargées positivement. Pour les accélérer, le champ électrique doit donc être dirigé de P_1 vers P_2 et comme $\vec{E} = -\text{grad } V$, il faut donc que **la plaque P_2 soit portée à un potentiel inférieur à la plaque P_1 .**

L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_{pe} = zeV$ où V est le potentiel électrique. Ainsi, son énergie mécanique est conservée, soit en l'exprimant entre les plaques P_1 où la vitesse est nulle et P_2

$$0 + zeV(P_1) = \frac{1}{2}mv^2 + zeV(P_2)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = ze[V(P_1) - V(P_2)]$$

$$v = \sqrt{\frac{2zeU}{m}}$$

2 Dans la zone de séparation, l'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz magnétique $\vec{F}_B = ze\vec{v} \wedge \vec{B}$. Comme elle est orthogonale à la vitesse, alors sa puissance est nulle, et d'après le théorème de la puissance cinétique,

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad E_c = \text{cte}.$$

Le mouvement de l'ion est bien uniforme.

3 La trajectoire étant circulaire plane, on la décrit dans la base de Frénet.

$$m\vec{a} = \vec{F}_L \quad \text{soit} \quad m\left(\frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n\right) = qvB\vec{e}_n$$

On déduit de la projection sur $\vec{e}_n$

$$R = \frac{mv}{zeB}.$$

En remplaçant v par son expression,

$$R = \frac{m}{zeB} \sqrt{\frac{2zeU}{m}} \quad \text{soit} \quad R = \sqrt{\frac{2mU}{zeB^2}}.$$

4 L'abscisse y de détection est égale à $2R$. On en déduit la masse d'une protéine de charge ze ,

$$m = \frac{zeR^2B^2}{2U} \quad \text{d'où} \quad M = \frac{zeR^2B^2}{2U} N_A$$

Les deux mesures pour $z = 1$ et 2 conduisent à une masse molaire de $1,3 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Cette valeur est élevée, mais les protéines sont des grosses molécules : une protéine moyenne compte typiquement 200 acides aminés, formés eux-mêmes de quinze à vingt atomes différents.

□ Exercice 8.4. Modèle classique de trou noir ★★

- 1 La force de gravitation et l'énergie potentielle dont elle dérive s'écrivent

$$\vec{F} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad E_p = -G \frac{m_0 m}{r}.$$

- 2 Voir cours : c'est une conséquence de la conservation du moment cinétique.

- 3 Voir cours : on remplace $\dot{\theta}$ par C/r^2 dans l'expression de l'énergie mécanique, ce qui permet d'identifier l'énergie potentielle effective

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{G m_0 m}{r}.$$

Attention : c'est une « fausse » énergie potentielle, qui contient un terme issu de l'énergie cinétique. On peut s'en rendre compte en notant la présence de la constante des aires C , qui dépend des conditions initiales.

- 4 Voir cours et figure 1. Le point M peut échapper à l'attraction de l'astre si sa trajectoire est non-bornée pour $r \rightarrow \infty$, c'est-à-dire pour $E_m \geq 0$.

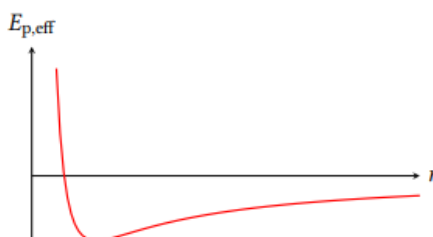


Figure 1 – Profil d'énergie potentielle effective au voisinage d'un astre sphérique.

- 5 Voir cours. On exprime la valeur de l'énergie mécanique à la limite d'un état de diffusion ($E_m = 0$) à la surface de l'astre (distance R , vitesse v_{lib}). On peut le retrouver plus qualitativement en exprimant la conservation de l'énergie mécanique entre la surface de l'astre et une distance infinie en indiquant qu'à la limite la particule s'infiniment éloignée de l'astre ($r \rightarrow \infty$) mais n'a plus qu'une vitesse nulle ($v = 0$). Ainsi,

$$\frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 - \frac{G m_0 m}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2 G m_0}{R}}$$

- 6 Par définition du rayon de Schwarzschild, si l'astre a pour rayon R_S alors sa vitesse de libération est égale à c . On en conclut que l'astre est un trou noir si

$$R < R_S = \frac{2 G m_0}{c^2}$$

- 7 Numériquement,

$$R_{S,S} = 3,0 \text{ km} \quad \text{et} \quad R_{S,T} = 9,0 \text{ mm}$$

ce qui donne en termes de densité

$$\rho_S = 7,7 \cdot 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \text{et} \quad \rho_S = 8,5 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

C'est phénoménal : imaginez toute la masse de la Terre concentrée dans une balle de babyfoot ou de ping-pong !

- 8 Une première contradiction consiste à généraliser des résultats de mécanique classique à des vitesses égales à la vitesse de la lumière, qui se rapportent donc au **domaine de la relativité**. La seconde contradiction est la généralisation de résultats de gravitation, qui s'appliquent donc aux particules massives, à la lumière, alors qu'on sait que **les photons sont sans masse**.

□ Exercice 8.5. Suspension d'un VTT ★★

Tout au long de l'exercice, le système étudié est l'ensemble du cadre et du vététiste, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. Ce système est soumis à son poids $\vec{P}$, à la force $\vec{F}_r$ de rappel du ressort de la suspension et à la force $\vec{F}_a$ exercée par l'amortisseur.

[1] Comme $z = z_e$ et $z_0 = 0$ sont des constantes, l'amortisseur n'exerce aucune force sur le vététiste, et la longueur du ressort est égale à z . La position d'équilibre est celle où la force exercée par le ressort sur M compense exactement le poids du VTT, soit

$$\vec{P} + \vec{F}_r = \vec{0} \quad \text{soit} \quad -mg\vec{u}_z - k(z_e - L_0)\vec{u}_z = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \boxed{z_e = L_0 - \frac{mg}{k}}.$$

Le ressort est plus court qu'à vide, ce qui est logique à cause du poids du vélo et du vététiste.

[2] Appliquons la loi de la quantité de mouvement au cadre du VTT dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids et aux forces exercées par le ressort et l'amortisseur. Ainsi,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{F}_a \quad \text{soit} \quad m\ddot{z}\vec{u}_z = -mg\vec{u}_z - k[(z - z_0) - L_0]\vec{u}_z - \alpha(\dot{z} - \dot{z}_0)\vec{u}_z.$$

En projetant et en remplaçant z par $Z + z_e$ (donc $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$), on obtient

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = -mg - k(z_e - z_0) + kL_0 - \alpha\dot{z}_0$$

ce qui donne en remplaçant z_e par son expression

$$\boxed{m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F \quad \text{avec} \quad F = kz_0 + \alpha\dot{z}_0}$$

F s'interprète comme une force verticale ressentie par le cadre en raison du caractère non plat du chemin. Vous avez tous déjà senti cet effet en voiture, par exemple en passant sur un dos d'âne.

[3] Le VTT est en mouvement forcé, par un forçage F sinusoïdal. Une fois le régime permanent atteint, ce qui est implicitement supposé, toutes les grandeurs dynamiques sont sinusoïdales de même pulsation que le forçage, et en particulier la vitesse v_z .

On utilise la représentation complexe pour déterminer son amplitude : $\underline{F} = F_m e^{j\omega t}$ et $\underline{v}_z = V_m e^{j(\omega t + \varphi)}$. Comme $v_z = \dot{z} = \dot{Z}$, $\underline{v}_z = j\omega \underline{Z}$. Passons l'équation différentielle obtenue en représentation complexe,

$$m(j\omega)^2 \underline{Z} + \alpha j\omega \underline{Z} + k \underline{Z} = \underline{F} \quad \text{d'où} \quad mj\omega \underline{v}_z + \alpha \underline{v}_z + k \frac{\underline{v}_z}{j\omega} = \underline{F},$$

et ainsi

$$\underline{v}_z = \frac{\underline{F}}{mj\omega + \alpha - \frac{jk}{m}}$$

L'amplitude de la vitesse est au final

$$\boxed{V_m = |\underline{v}_z| = \frac{F_m}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}}}$$

[4] $\underline{H}$ représente la façon dont les oscillations du chemin (via z_1) se répercutent sur le cadre (via $\underline{Z}$) par l'intermédiaire de la suspension, et sont donc ressenties par le vététiste. Comme $\underline{v}_z = j\omega \underline{Z}$ et $\underline{F} = kz_0 + j\omega \alpha z_0$, on obtient en remplaçant dans l'expression de $\underline{v}_z$ obtenue à la question précédente

$$j\omega \underline{Z} = \frac{kz_0 + j\omega \alpha z_0}{mj\omega + \alpha - \frac{jk}{m}}$$

d'où

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}}{z_0} = \frac{k + j\alpha\omega}{k + j\alpha\omega - m\omega^2}$$

En utilisant $\alpha = 2\xi\sqrt{mk}$ et en divisant numérateur et dénominateur par k , on aboutit à

$$\boxed{\underline{H}(u) = \frac{1 + 2j\xi u}{1 - u^2 + 2j\xi u}}$$

[5] Pour ressentir le moins possible les vibrations dues aux cailloux, il faut que $|\underline{H}|$ soit aussi petit que possible, et éviter absolument la situation de résonance. D'après la figure, cela correspond à $u \gg 1$, soit une pulsation ω élevée, donc à une vitesse élevée. **Pour minimiser les vibrations, il faut donc rouler aussi vite que possible sur les cailloux.** Évidemment, il en va tout autrement de l'adhérence!