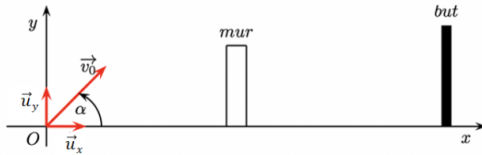


□ Exercice 8.1. Coup franc ! ★★ (Dynamique en coordonnées cartésiennes, trajectoire, frottements fluides)

On étudie, dans le référentiel terrestre de repère fixe $Oxyz$ un coup franc de football tiré à 20 m/s, face au but de hauteur 2,44 m et dans son plan médian vertical (Oxy). L'axe (Oy) est choisi suivant la verticale ascendante.



Le ballon, de masse $m = 430$ g, est assimilé à un point matériel M posé sur le sol initialement en O . Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Ce dernier est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ de norme 20 m/s, et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. L'origine des dates correspond au départ du ballon.

Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

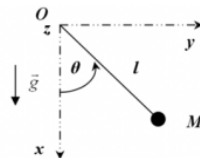
1. Établir les lois horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.
2. Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?
3. Le tir est-il cadré ?

En réalité, des frottements existent, qu'on modélise par une force $\vec{F} = -h\vec{v}$, où h est une constante positive de valeur $5,0 \cdot 10^{-3}$ kg/s et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M à chaque instant.

4. Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau = \frac{m}{h}$.
5. Donner l'équation de la trajectoire.
6. Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?
7. Le tir est-il cadré ?

□ Exercice 8.2. Pendule simple ★★ (Dynamique en coordonnées polaires, frottements fluides, oscillateur)

Un pendule simple est constitué d'un point matériel M , de masse m , lié à l'extrémité d'un fil de longueur L et de masse nulle, l'autre extrémité étant fixe en un point O . On suppose que le mouvement a lieu dans le plan vertical (Oxy), et on repère la position de M avec l'angle polaire θ (voir figure), l'angle θ restant toujours faible. À l'instant $t = 0$, on lâche la masse depuis un angle θ_0 , sans vitesse initiale.



Lorsqu'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par une force $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, où $\vec{v}$ désigne la vitesse du point M , et α une constante positive.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ et l'écrire sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

2. a. À quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

On supposera dans la suite que cette condition est vérifiée et que l'angle θ peut se mettre sous la forme

$$\theta(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\Omega t + B) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes et } \Omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

- b. Que représente physiquement τ ?

□ Exercice 8.3. Spectromètre de masse ★★ (Mouvement des particules chargées dans un champ électromagnétique)

Un spectromètre de masse est un appareil qui permet de mesurer le rapport m/z entre la masse m et la charge z d'un ion, très utilisé en analyse chimique. De nombreuses technologies de spectromètre de masse existent : nous étudions ici le principe d'un spectromètre dit « à secteur magnétique », utilisé afin de mesurer la masse molaire d'une protéine.

Dans un premier temps, des protéines sont ionisées et acquièrent une charge e ou $2e$ ($z = 1$ ou 2). Elles sont ensuite accélérées par une tension U dans la zone de transfert, avant d'atteindre une zone de séparation soumise à un champ magnétique créé par un aimant supraconducteur. Une barrette de capteurs de charge est placée dans la chambre de séparation. On mesure ainsi la quantité de protéines ayant impacté chaque point du détecteur en fonction de son abscisse y .

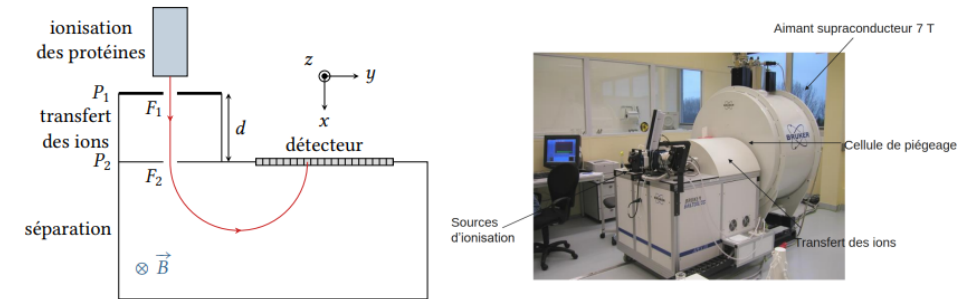


Figure 2 – Spectromètre de masse.

Une protéine ionisée de masse m et charge ze entre dans le spectromètre par la fente F_1 . On néglige sa vitesse initiale. Une tension constante $U = 10$ kV appliquée entre les plaques P_1 et P_2 séparées de d permet de l'accélérer jusqu'à la fente F_2 .

- 1 - Quelle doit être la plaque de potentiel le plus élevé pour que l'ion soit effectivement accéléré ? Établir l'expression de la vitesse v de l'ion lorsqu'il atteint la plaque P_2 .

L'ion pénètre ensuite dans la chambre de séparation où il règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B\vec{e}_z$ valant 7 T. Ce champ magnétique donne à l'ion une trajectoire circulaire, et après avoir parcouru un demi tour il atteint le détecteur en un point d'abscisse y .

- 2 - Montrer que le mouvement de l'ion dans cette région est uniforme.

- 3 - Déterminer littéralement le rayon R de la trajectoire d'une protéine de charge ze .

- 4 - Les protéines ionisées sont détectées aux abscisses 14,8 cm et 10,5 cm, l'origine étant prise au niveau de F_2 . En déduire la masse molaire de la protéine étudiée.

□ Exercice 8.4. Modèle classique de trou noir ★★ (Mouvement dans un champ de forces centrales, énergie potentielle effective)

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace¹ en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogue relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposée dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine (la liste est sur Wikipédia), mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle heuristique de physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un astre sphérique de masse m_0 , de rayon R et de centre O . Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

- 1 - Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M . Celle-ci se conserve-t-elle ?
- 2 - Montrer que le mouvement de M est nécessairement plan. M étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.
- 3 - Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

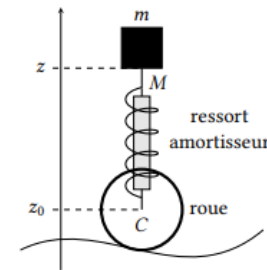
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r .

- 4 - Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_{p,\text{eff}}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point M peut échapper à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.
- 5 - En déduire la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre.
- 6 - Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.
- 7 - Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$) et pour la Terre ($M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). En déduire la densité minimale d'un trou de noir de cette masse.
- 8 - Quelles sont les deux contradictions internes à cette approche ?

Notons toutefois que malgré les deux limites évoquées, le rayon de Schwarzschild donne le bon ordre de grandeur de la taille d'un trou noir de masse m .

□ Exercice 8.5. Suspension d'un VTT ★★ (Ressort, oscillateur mécanique en régime forcé, filtre)



Le but de cet exercice est d'étudier les caractéristiques d'une suspension de VTT. Le VTT est modélisé par un solide de masse m décrivant le cadre et le vététiste, repéré par la position d'un point M , posé sur une unique suspension. L'effet de la roue arrière n'est pas pris en compte.

La suspension est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 attaché en M dont l'autre extrémité est fixée au centre C de la roue, qui suit exactement le profil du chemin. Les positions de M et C sont repérées par leurs abscisses z et z_0 sur un axe vertical Oz ascendant tel que $z_0 = 0$ corresponde à la position moyenne du chemin. Outre le ressort, la suspension contient un amortisseur fluide de coefficient d'amortissement α . L'effet de l'amortisseur sur le mouvement de M se modélise par une force

$$\vec{F}_a = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_0)\vec{u}_z$$

où v_z et $\dot{z}_0$ sont les vitesses verticales respectives de M et C . La raideur k et le coefficient α peuvent être réglés par l'intermédiaire de la pression en huile et en air dans la suspension.

- 1 - Lorsque le VTT se déplace sur une route plate et lisse, $z_0 = 0$, et la cote z est constante, de valeur z_e , en régime dit stabilisé. Déterminer z_e en fonction de m , g , k et L_0 .

- 2 - Considérons maintenant le VTT se déplaçant sur un chemin bosselé. On pose $Z(t) = z(t) - z_e$. Montrer que $Z(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F(t),$$

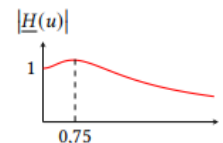
où $F(t)$ est une fonction à déterminer, dépendant de z_0 , de v_0 et des constantes α et k caractéristiques de la suspension. Préciser le sens physique de F .

- 3 - On considère le cas où le profil du chemin est tel que $F(t)$ est une fonction sinusoïdale d'amplitude F_m et de pulsation ω . Justifier que la vitesse v d'oscillation verticale du VTT est également sinusoïdale de même pulsation que F . Calculer son amplitude V_m en fonction de F_m .

- 4 - La fonction de transfert de la suspension est définie par $\underline{H} = \underline{Z}/\underline{z_0}$, et on introduit les paramètres adimensionnés

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \quad \text{et} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Que représente physiquement $\underline{H}$? Exprimer $\underline{H}$ en fonction de ξ et u .



Pour un VTT se déplaçant à la vitesse V sur un chemin fait de cailloux de taille ℓ , le spectre d'excitation est maximal autour de $\omega = 2\pi V/\ell$. La figure ci-contre représente l'allure de $|\underline{H}(u)|$ pour $\xi = 1$.

- 5 - Pour un meilleur confort, vaut-il mieux rouler vite ou lentement ? Commenter.