Exercices d'entrainement :

□ Exercice 9.1. Distance d'arrêt ★ (Dynamique en coordonnées cartésiennes)

Le PFD appliqué au jeton dans le référentiel terrestre s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}.$$

L'accélération étant horizontale :

$$m\vec{a} = \overrightarrow{R_T} \text{ et } \overrightarrow{R_N} = -\vec{P}.$$

Les lois de Coulomb pour le frottement solide assurent que $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = f\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ si l'on fait l'hypothèse de glissement. De même, les lois de Coulomb dans le cas du glissement imposent que le frottement est de même direction et de sens opposé à la vitesse de glissement du jeton sur le sol. On choisit l'axe (Ox) comme axe du mouvement (la vitesse est de même direction et de même sens que $\overrightarrow{u_x}$) et alors

$$\overrightarrow{R_T} = -fmg\overrightarrow{u_x}.$$

Première méthode : on résout l'équation différentielle régissant le mouvement ce qui donne avec les conditions initiales : $v(t) = v_0 - fgt$ et $x(t) = x_0 + v_0 t - \dfrac{fgt^2}{2}$. Le jeton s'arrête au temps t_f tel que $v(t_f) = 0$, c'est-à-dire $t_f = \frac{v_0}{fg}$ et la distance parcourue vaut alors :

$$\boxed{d = x(t_f) - x_0 = \frac{v_0^2}{2fg}}$$

Deuxième méthode : par application du théorème de l'énergie cinétique. La seule force qui travaille est la force de frottement, soit $\Delta\mathcal{E}_c = -\dfrac{1}{2}mv_0^2 = W_{R_T} = -\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| d = -fmgd$. On trouve également

$$\boxed{d = \frac{v_0^2}{2fg}}$$

Exercice 9.2. Descente à ski ★★ (Projections, frottements statique et dynamique)

1. La deuxième loi de Newton appliquée à la skieuse dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}$$

En projetant cette relation sur l'axe (Oy), on obtient :

$$-mg\cos(\alpha) + N = 0 \quad \Rightarrow \boxed{N = mg\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad T = fmg\cos(\alpha).}$$

2. La projection sur l'axe (Ox) donne :

$$mg\sin(\alpha) - \lambda\dot{x} - fmg\cos(\alpha) = m\ddot{x},$$

ce qui s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} - a\dot{x} = b,$$

avec $a = \dfrac{\lambda}{m}$ et $b = g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))$.
La solution est donc :

$$\dot{x}(t) = \frac{b}{a} + Ke^{-at},$$

où K est une constante déterminée par les conditions initiales. Avec $\dot{x}(0) = 0$, on trouve $K = -\dfrac{b}{a}$, et donc :

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{mg}{\lambda}(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))(1 - e^{-\lambda t/m}).}$$

En intégrant cette équation avec $x(0) = 0$, on obtient :

$$\boxed{x(t) = \frac{mg}{\lambda}(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))\left(t + \frac{m}{\lambda}e^{-\lambda t/m} - \frac{m}{\lambda}\right).}$$

3. La vitesse limite est donnée par :

$$\boxed{v_l = \frac{mg}{\lambda}(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)).}$$

Numériquement : $\boxed{v_l = 60\,\text{m/s}.}$

4. La date t_1 telle que $\dot{x}(t_1) = \dfrac{v_l}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda t_1/m} = \dfrac{1}{2}$ est :

$$\boxed{t_1 = \frac{m}{\lambda}\ln(2).}$$

Numériquement : $\boxed{t_1 = 6,3\,\text{s}.}$

5. En choisissant une nouvelle origine des temps $t' = 0$ et de l'espace $x'(0) = 0$, la vitesse initiale est $\dot{x}'(0) = \dfrac{v_l}{2}$.
Le PFD projette suivant $\overrightarrow{u_x}$ devient :

$$mg\sin(\alpha) - 20fmg\cos(\alpha) = m\ddot{x}',$$

et en intégrant, on trouve que $\dot{x}'(t')$ s'annule pour :

$$t'_2 = \frac{v_l}{2(-g\sin(\alpha) + 20fg\cos(\alpha))}.$$

La distance parcourue est donnée par :

$$\boxed{x'(t'_2) = \frac{v_l^2}{8g(20f\cos(\alpha) - \sin(\alpha))}.}$$

Numériquement : $\boxed{x'(t'_2) = 650\,\text{m}.}$

Exercice 9.3. Etude d'un palet sur une piste ★★ (Coordonnées polaires, énergétique)

1. On utilise le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mgz = -mgR\cos\alpha \text{ soit } \boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR\cos\alpha}.}$$

2. Le palet arrive en B si $v_B \geq 0$, soit $\boxed{v_A \geq \sqrt{2gR\cos\alpha} = v_{\min} \simeq 5{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$

3. On applique le PFD au palet. Les forces qui s'appliquent sont le poids et la réaction du support, donc :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N}.$$

On projette cette équation sur l'axe AB de déplacement du palet pour éliminer la réaction du support, et on trouve :

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\alpha.$$

Cette équation s'intègre en connaissant la valeur initiale v_A de la vitesse en $v(t) = v_A - (g\sin\alpha)t$. Le palet arrive en B pour $t = \tau$ donc :

$$v_B = v_A - (g\sin\alpha)\tau,$$

ce qui donne en utilisant la réponse à la première question

$$v_A - (g\sin\alpha)\tau = \sqrt{v_A^2 - 2gR\cos\alpha},$$

soit

$$\boxed{\tau = \frac{v_A - \sqrt{v_A^2 - 2gR\cos\alpha}}{g\sin\alpha}}$$

4. Le PFD appliqué au palet s'écrit toujours $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N}$.
On projette maintenant sur l'axe

$$\vec{u_r} : ma_r = -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_N \quad \text{soit} \quad \boxed{R_N = m\left(g\cos\theta - R\dot{\theta}^2\right).}$$

5. Le décollage a lieu si la réaction normale s'annule. Pour que le palet reste sur la piste en B , il faut donc que la réaction normale reste positive à cet endroit, soit $g\cos\alpha > R\dot{\theta}^2 = \frac{v_B^2}{R}$. En utilisant la réponse à la première question, cette condition devient :

$$gR\cos\alpha > v_A^2 - 2gR\cos\alpha,$$

d'où

$$\boxed{v_A < \sqrt{3gR\cos\alpha}.}$$

6. On commence par déterminer la vitesse $v(\theta)$ sur l'arc BC pour un angle θ quelconque en utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv^2(\theta) - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mgz = -mgR\cos\theta,$$

soit

$$v^2(\theta) = v_A^2 - 2gR\cos\theta.$$

Le décollage a lieu lorsque la réaction du support s'annule, c'est-à-dire

$$g\cos\theta_d = R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2(\theta_d)}{R}.$$

On en déduit que

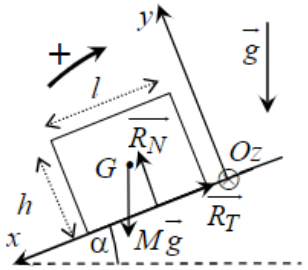
$$v^2(\theta_d) = gR\cos\theta_d = v_A^2 - 2gR\cos\theta_d,$$

soit $3gR\cos\theta_d = v_A^2$, et donc

$$\boxed{\theta_d = \arccos\left(\frac{v_A^2}{3gR}\right).}$$

Exercice 9.4. Basculement sur un plan incliné ★★ (Rotation)

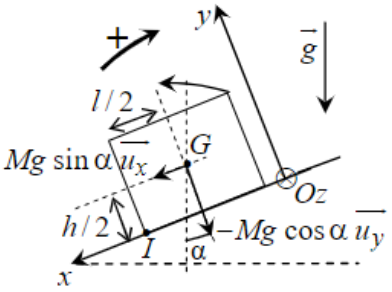
1. En l'absence de basculement, le bloc est soumis à l'action de son propre poids $M\vec{g}$ s'exerçant en G, et aux réactions normale $\overrightarrow{R_N}$ et tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ ramenées en un point de la surface de contact, où $\overrightarrow{R_N} = R_N\,\vec{e_y}$ avec $R_N > 0$ et $\overrightarrow{R_T} = -R_T\,\vec{e_x}$ avec $R_T > 0$ (le bloc tend à glisser dans le sens des x positifs). À l'équilibre $M\vec{g} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N} = \vec{0}$ et $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| < \mu \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$, soit : $Mg\sin\alpha < \mu\, Mg\cos\alpha$ et finalement $\tan\alpha < \mu$.



Au contraire, la condition recherchée de glissement sans basculement correspond à : $\boxed{\tan\alpha \geq \mu}$.

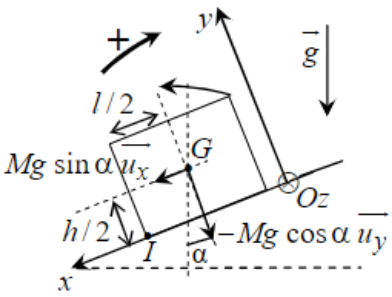
⇨ *Méthodes 2.1 et 2.3*

2. Plaçons-nous à l'amorce du basculement alors que le contact avec le plan ne se fait plus que par la génératrice de contact, c'est-à-dire l'axe (Iz). Ainsi, les réactions normale et tangentielle s'exercent au point I. Cependant, l'amont du bloc venant juste de commencer à décoller, on néglige le petit angle ε que fait sa base avec le plan incliné. La figure ci-contre présente une vision exagérée de la situation.



Notons que le basculement correspond à une rotation dans le sens négatif, le sens positif correspondant à un vecteur rotation positif suivant (Oz) conformément à la règle du tire-bouchon.

Appliquons le TMC en projection suivant l'axe (Iz), les moments suivant (Iz) des réactions normale et tangentielle étant nuls, il vient : $J_{Iz}\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \left(\overrightarrow{IG} \wedge M\vec{g}\right)\cdot\vec{e_z} = \dfrac{Mg}{2}\left(l\cos\alpha - h\sin\alpha\right) < 0$.



On peut retrouver ce résultat en utilisant la méthode des bras de levier pour les composantes normale et tangentielle du poids : la première tend à faire tourner dans le sens positif et sa norme est multipliée par le bras de levier $\dfrac{l}{2}$, la seconde tend à faire tourner dans le sens négatif (sens du basculement) et sa norme est multipliée par le bras de levier $\dfrac{h}{2}$.

Ainsi, la condition de basculement sans glissement s'écrit : $l\cos\alpha - h\sin\alpha < 0$, soit $\boxed{\tan\alpha > \dfrac{l}{h}}$.

Ce résultat traduit l'analyse intuitive du problème suivant laquelle le basculement se produit pour un angle d'autant moins élevé que le bloc est haut et peu large.

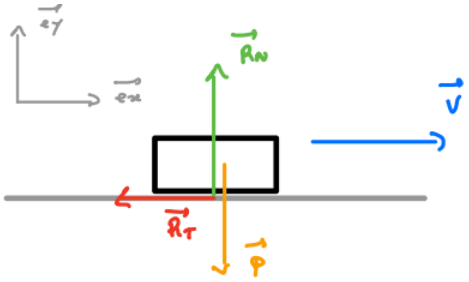
3. Finalement, la condition de glissement sans basculement s'écrit $\boxed{\mu < \tan\alpha < \dfrac{l}{h}}$. Cette condition n'est vérifiée que si $\mu < \dfrac{l}{h}$. Comme $\mu \in [0,1]$, elle impose $\dfrac{l}{h} > 1$, le bloc doit donc être moins haut que large. Pour $\mu = 0{,}5$ cette condition s'écrit $\dfrac{1}{2} < \dfrac{l}{h}$: le bloc doit être au moins deux fois plus large que haut pour ne pas basculer avant que le glissement ne s'amorce.

Exercice 9.5. Oscillateur armorti par frottement solide ★★ (Ressort, oscillations)

1. 2e loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$

Projection $\vec{e_y}$: $0 = -mg + R_N$

$\Rightarrow R_N = mg$



On, si il y a glissement, $R_T = \mu R_N$

D'où $R_T = \mu mg$

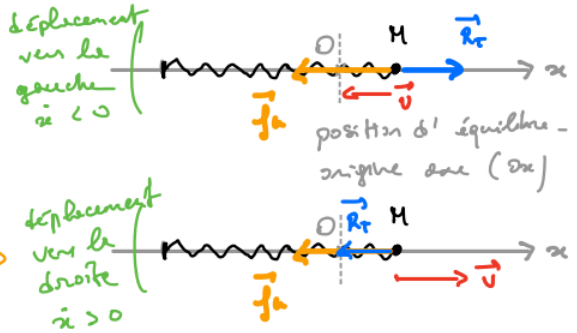
2. $\vec{P}$ et $\vec{R_N}$ se compensent.

Donc $m\vec{a} = \vec{f_k} + \vec{R_T}$

avec $\vec{f_k} = -kx\vec{e_x}$

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x}$

et $\vec{R_T} = \begin{cases} \mu mg\vec{e_x} & \text{si } \dot{x} < 0 \\ -\mu mg\vec{e_x} & \text{si } \dot{x} > 0 \end{cases}$



D'où ($\dot{x} < 0$) : $m\ddot{x} = -kx + \mu mg$

soit $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu g$ si $\dot{x} < 0$ (1)

De même, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\mu g$ si $\dot{x} > 0$ (2) avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

3. Si l'oscillateur est immobile, alors il ne repart que si $|f_k| > R_T$,

donc si $k|x| > \mu mg \Rightarrow |x| > \frac{\mu mg}{k}$. On pose $a = \frac{\mu mg}{k}$,

et donc l'objet ne repart pas si il s'arrête

avec $x \in [-a, a]$.

4. avec $a = x_0$ et $\dot{x} = 0$, le mouvement va être vers la gauche.

donc on résout (1) : $x = \underbrace{X_m \cos(\omega_0 t + \phi)}_{sh} + \underbrace{\frac{\mu g}{\omega_0^2}}_{sp}$ et $\frac{\mu g}{\omega_0^2} = \frac{\mu mg}{k} = a$

D'où $x = X_m \cos(\omega_0 t + \phi) + a$

Les C.I imposent : $\begin{cases} x_0 = X_m \cos\phi + a \\ 0 = -\omega_0 X_m \sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = X_m + a \\ 0 = \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_m = x_0 - a \\ \phi = 0 \end{cases}$

D'où $x = (x_0 - a)\cos(\omega_0 t) + a$ $\quad x(t = T/2) = -(x_0 - 2a)$ l'amplitude du mouvement a diminué de $2a$.

5. Après $t = T/2$, l'oscillateur repart vers la droite

On résout (2), en repartant de $t' = 0$:

$x = X_m \cos(\omega_0 t' + \phi) - a$ et $\begin{cases} -x_0 + 2a = X_m \cos\phi - a \\ 0 = \sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_m = -(x_0 - 3a) \\ \phi = 0 \end{cases}$

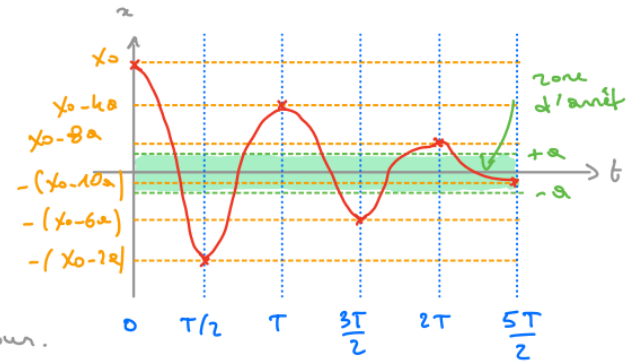
D'où $x = -(x_0 - 3a)\cos(\omega_0 t') - a$ $\quad x(t = T) = x(t' = T/2) = x_0 - 4a$ à nouveau l'amplitude diminue de $2a$.

Pour $x(t = 3T/2)$, il suffit de reprendre la résolution du 4/.

$x(t = 3T/2) = -(x_0 - 6a)$

6. A chaque aller ou retour, l'amplitude diminue de 2a, jusqu'à ce qu'elle soit inférieure à a.

7. Dans l'illustration ci-contre, X_0 serait un peu supérieure à 10a, et on effectue 5 aller ou retour
⇒ 2,5 aller-retour.
Avec $X_0 = 8,5a$, on effectuerait le aller ou retour ⇒ 2 aller-retour.



$8,5a \longrightarrow 6,5a \longrightarrow 4,5a \longrightarrow 2,5a \longrightarrow 0,5a$ ✗
aller retour aller retour immobilisation

Exercice 9.6. Résolution de problème - Un téléphone qui glisse par rapport à une feuille ★★

On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la table (terrestre), supposé galiléen. On commence par schématiser la situation sur la figure 2. On appelle O, origine de l'axe horizontal des x, la position initiale du centre d'inertie du téléphone portable. Les distances caractéristiques R, r et D sont représentées sur la vue de dessus de la figure 2(b).

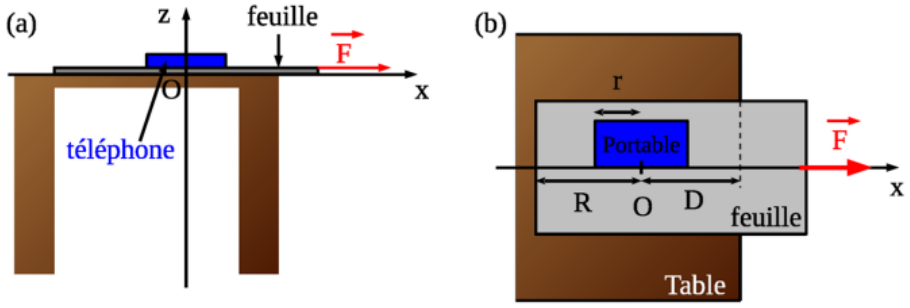


FIGURE 2 – (a) Vue de côté de la situation – (b) Vue de dessus. Pour ne pas alourdir la figure, les autres forces n'ont pas été représentées.

Grandeurs utiles : On appelle m la masse de la feuille, M celle du téléphone et $g = 10$ m.s^{-2} l'accélération de la pesanteur. On note $\vec{F} = F\vec{u_x}(F > 0)$ la force exercée par l'opérateur sur la feuille. On suppose que cette force est nulle pour $t < 0$ puis constante (réponse à un échelon). On notera μ le coefficient de frottement du téléphone sur la feuille de papier. On négligera la différence entre coefficient statique et dynamique.
Concernant les valeurs numériques, on prend $m = 5$ g : pour ne pas dépasser la limite d'affranchissement d'une lettre de 20 g de la poste, il ne faut pas dépasser 4 feuilles A4. Pour le téléphone, on peut prendre $M = 100$ g
Enfin, on peut considérer que μ est compris entre 0,2 et 0,4 . Pour obtenir cet ordre de grandeur, on peut poser son téléphone sur un papier, posé lui-même sur un cahier rigide horizontal. On incline l'ensemble d'un angle α. Si le téléphone glisse pour un angle α_c, on a $\mu = \tan\alpha_c$ Expérimentalement, on obtient des angles α_c entre 10° et 20°, soit $0,18 < \alpha_c < 0,36$.
On considérera un mouvement à un seul degré de liberté le long de l'axe (Ox) confondu avec la droite d'action de la force $\vec{F}$, comme le montre la figure 2 (b).

Bilan des forces sur le téléphone : son poids : $\vec{P} = -Mg\vec{u_z}$; la réaction de la feuille sur le téléphone, composée de sa composante normale et tangentielle : $\vec{R} = N\vec{u_z} + T\vec{u_x}$. Tant que le téléphone ne décolle pas, on a $N > 0$. Par contre, à ce stade, il faut noter que T est algébrique et indéterminée a priori.

Bilan des forces sur la feuille : son poids : $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$; la réaction du téléphone sur la feuille, composée de sa composante normale et tangentielle : $\vec{R} = -N\vec{u_z} - T\vec{u_x}$ (on a utilisé le principe des actions réciproques au passage) ; Force de l'opérateur : $\vec{F} = F\vec{u_x}$; ne pas oublier bien sûr la réaction de la table : on considère qu'il n'y a pas de frottement de glissement, soit $\vec{R_t} = N_t\vec{u_z}$ On applique ensuite le théorème de la quantité de mouvement (ou du mouvement du centre d'inertie) respectivement au téléphone et à la feuille de papier. En projection sur les axes (Ox) et (Oz), on obtient respectivement :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_t & = T \quad (1) \\ 0 & = N - Mg \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_f & = F - T \quad (3) \\ 0 & = N_t - N - mg \quad (4) \end{cases}$$

La relation (2) conduit $N = mg$: la réaction de la composante normale de l'action de la feuille sur le téléphone compense le poids du téléphone.
La relation (4), en utilisant (2), conduit à $N_t = (M+m)g$. Intuitivement, la composante normale de l'action de la table compense le poids de l'ensemble {téléphone, feuille}

Condition de glissement du téléphone sur la feuille :
Dans un premier temps, il faut nécessairement que le téléphone glisse sur la feuille, sinon, ce dernier est entraîné et on court à la catastrophe.

Hypothèse : A partir de $t = 0$, on suppose qu'il n'y a pas glissement du téléphone sur la feuille. On a donc à tout instant $x_t(t) = x_f(t) = x(t)$, tant que $|T| \leq \mu N$.

En sommant (1) et (3) pour éliminer T, on obtient $(M+m)\ddot{x} = F$. On reconnaît au passage la composante selon $\overrightarrow{u_x}$ du théorème du mouvement du centre d'inertie pour le système {téléphone, feuille}.
Avec (1), on obtient l'expression : $T = \frac{M}{M+m}F > 0$

La condition de non glissement, s'écrit donc :

$$\frac{M}{M+m}F \leq \mu Mg.$$

Pour que le téléphone glisse sur la feuille, il faut

$$\boxed{F > \mu(M+m)g.}$$

Avec les valeurs numériques choisies, on a une force minimale comprise entre 0.2 N et 0.4 N selon la valeur de μ, soit une force de l'ordre de grandeur du poids de l'ensemble {téléphone, feuille}, pondéré du coefficient μ. Si cette condition est facilement remplie pour le téléphone sur la feuille, elle devient plus délicate dans le cas de nombreux couverts et assiettes sur une nappe...