ENESA
Lucas MPI

DM de Physique.

(Q1) le plan $\Pi=(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie pour les courants donc le champs $\vec{B}$ est selon $\vec{u_\theta}$.
La distribution de courant est ~~on~~ invariante selon ~~l'axe~~ z et θ car le fil est infinie donc le champ s'écrit:

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{e_\theta}.$$

(Q2) On applique le théorème d'Ampère avec comme contour un cercle de d'axe Oz, de rayon r, orient selon $\vec{e_\theta}$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlacé}$$

~~$\oint B(r)$~~.

$$B(r)\,2\pi r = \mu_0 I_{enlacé}$$

les densités de courant uniformes sont:

- âme : $j_1 = \dfrac{i}{\pi R_1^2}\,u_z$

- gaine : $j_2 = \dfrac{-i}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}\,u_z$

donc :

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i}{2\pi R_1^2}\, r & 0 \leq r \leq R_1 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\,\dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} & R_2 < r < R_3 \\ 0 & r > R_3 \end{cases}$$

3) Pour $r < R_1$

$$B = 0$$

Pour $R_1 < r < R_2$

On englobe tout le courant i :

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Pour $r > R_2$

On englobe les 2 de courant i :

$$B(r) \; i - i = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0$$

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

4) le champ est non nul que pour $R_1 < r < R_2$

On considère on longueur l.

En coordonnées cylindriques :

$$d\tau = r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$d\tau = 2\pi r l \, dr$$

$$\text{donc } B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \qquad B^2(r) = \frac{\mu_0^2 i^2}{4\pi^2 r^2}$$

$$U_m = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}$$

L'énergie vaut donc $U_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l \, dr$

$$= \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

5) On sait que $U_m = \frac{1}{2} L i^2$

donc $\frac{1}{2} L i^2 = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Lambda = \frac{L}{l}$$

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \text{avec } [\Lambda] = \frac{[L]}{[l]} = H\,m^{-1}$$

6) AN : $L = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \times 0{,}693$

$$L \simeq 1{,}39 \times 10^{-7}\ H$$

$$L \simeq 0{,}139\ \mu H$$

Partie 2

7) On a la charge porté par une surface cylindrique est :

$Q = \sigma \times S$

$S = 2\pi R_1 l$

donc $Q = \sigma_1 2\pi R_1 l$

comme ~~le~~ cable est globalement neutre : $Q + Q_{gaine} = 0$

or $Q_{gaine} = \sigma_2 2\pi R_2 l$, donc :

$$\sigma_1 2\pi R_1 l + \sigma_2 2\pi R_2 l = 0$$

$$\sigma_2 = -\sigma_1 \frac{R_1}{R_2}$$

8) Les plan $\Pi_1 (M, \vec{ur}, \vec{uz})$ et $\Pi_2 (M, \vec{ur}, \vec{u\theta})$ sont des Π_+ donc E ~~est selon~~ selon $\vec{er}$.

de plus on a des invariances selon θ et z donc.

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{ur}$$

9) On utilise le théorème de Gauss :

$$\oiint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de longueur l.

Et on obtient.

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r}\vec{ur} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

10) $u_e = \dfrac{\epsilon_0 Q^2}{8\pi^2\epsilon_0^2 l^2 r^2}$ et $dr = 2\pi r l\, dr$

$$u_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 l^2 r^2} 2\pi r l\, dr \qquad \boxed{U_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l}}$$

$$u_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$