DM n°2

Exercice 1 Partie 1.

1) En utilisant un système de coordonnée cylindrique (r, θ, z) de base locale (e_r, e_θ, e_z).

d'autre part: Les invariances,

Le câble est rectiligne, infiniment long sur l'axe (O, e_z) et invariant par rotation autour de cet axe. Le champ magnétique ne dépend donc ni de z ni de θ mais uniquement de r:

$$B(M) = B(r)$$

- Symétrie: Tout plan contenant l'axe (O, e_z) est un plan de symétrie de la distribution de courant, Le champ magnétique $B(M)$ étant un vecteur axial il est perpendiculaire à ces plans de symétrie.

$$B(M) = B(r)\, e_\theta \quad \text{avec } u = e_\theta$$

2) en utilisant le théorème d'Ampère:

$$\oint_C B \cdot dl = \mu_0 I_{enlacé}$$

On choisit C de rayon r.

D'après la question précédente:

$B(M) = B(r) e_\theta$ et le déplacement $dl = r d\theta e_\theta$ donc

$$\oint_C B \cdot dl = \int_0^{2\pi} B(r) e_\theta \cdot (r d\theta e_\theta) = 2\pi r B(r)$$

Dans l'âme $(0 \leq r \leq R_1)$

$$j_1 = \frac{i}{\pi R_1^2} \quad \text{donc} \iff I_{enlacé} = j_1 \times (\pi r^2) = i \frac{r^2}{R_1^2}$$

avec le théorème d'ampère :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 i \frac{r^2}{R_1^2} \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2}$$

dans l'isolant $(R_1 \leq r \leq R_2)$

$$I_{enlacé} = i$$

avec le théorème d'Ampère :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 i \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

à l'intérieur de la gaine $(R_2 \leq r \leq R_3)$

$$j_2 = \frac{i}{\pi (R_3^2 - R_2^2)}$$

$$I_{enlacé} = i - j_2 \pi (r^2 - R_2^2) = i \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = i \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

avec le théorème d'Ampère :

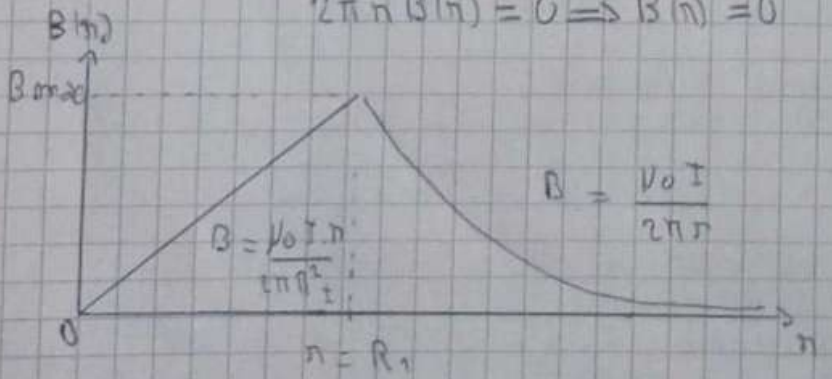
$$2\pi r B(r) = \mu_0 i \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

à l'extérieur du câble $(r \geq R_3)$

$$I_{enlacé} = i - i = 0$$

avec le théorème d'Ampère :

$$2\pi r B(r) = 0 \Longrightarrow B(r) = 0$$



3) la fonction B(r) est continue en $r = R_1$ car les deux expressions intérieure et extérieure tendent vers la même valeur limite

$$\lim_{r \to R_1^-} B(r) = \lim_{r \to R_1^+} B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$$

4) en utilisant la point cour

$$U_m = \iiint_V w_m(M)\, d\tau$$

ou $w_m(M) = \frac{\|B(M)\|^2}{2\mu_0}$

d'autre part en coordonnée cylindriques (r, θ, z)

$$d\tau = r\, dr\, d\theta\, dz$$

de plus d'après la question 2 pour $R_1 < r < R_2$

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \Longrightarrow \|B(r)\|^2 = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0^2 i^2}{4\pi^2 r^2}$$

on a donc l'intégrale triple

$$U_m = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0^2 i^2}{4\pi^2 r^2}\right) r\, dr$$

$$U_m = 2\pi l \times \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\, dr$$

$$U_m = \frac{\mu_0 l i^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

5) d'une part d'après le rappel de l'énoncé

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2$$

d'autre part d'après la question précédente on a

$$U_m = \frac{\mu_0 l i^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

on a ~~donc~~ donc

$$\frac{1}{2} L i^2 = \frac{\mu_0 l i^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} L = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Longrightarrow L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \Lambda = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

6) en utilisant $L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

AN. $L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1,0}{2\pi} \ln\left(\frac{2,0 \times 10^{-2}}{1,0 \times 10^{-2}}\right)$

$L = 1,4 \times 10^{-7} \times 10^{-7} H$.

Partie 2

7) ~~En exprimant~~

L'ame du câble est un cylindre de rayon R_1, de longueur ℓ

La surface latérale $S_1 = 2\pi R_1 \ell$ donc la charge portée par cette portion d'âme est

$$Q = \sigma_1 \times S_1 = 2\pi R_1 \sigma_1$$

or d'après l'énoncé le câble est globalement neutre l'âme porte la charge $Q > 0$ et la gaine porte la charge $-Q$.

on a :

$$-Q = \sigma \times (2\pi R_2 \ell) = 2\pi R_2 \ell \sigma_2$$

ainsi en remplaçant Q par son expression :

$$-2\pi R_1 \ell \sigma_1 = 2\pi R_2 \ell \sigma_2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_2 = -\frac{R_1}{R_2} \sigma_1$$

8) en se plaçant en coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

Invariance : les cylindres sont infinis selon l'axe $(O, \vec{u}_z)$

Invariance de translation donc le champ $\vec{E}$ ne dépend pas de z.

. Par rotation autour de l'axe $(O, \vec{u}_z)$ le champ $\vec{E}$ ne dépend pas de l'angle θ.

Donc $\vec{E}(M)$ ne dépend que r. $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$

Symétries.

) . Plan de Symétrie : Tout plan contenant l'axe $(O, \vec{k})$ (plan méridien) est un plan de Symétrie de la distribution de charge donc le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ étant un Vecteur polaire appartient à ces Symétries, ce qui élimine $\vec{e}_\theta$

. Propriété de la composante selon l'axe : par Invariance par translation la composante z est nulle.

. Donc le champ $\vec{E}(M)$ s'écrira sous la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r .$$

) 9) Pour $R_1 < r < R_2$

en utilisant le Théorème de Gauss pour une surface fermée constituée d'un cylindre de rayon r, de hauteur l

Calcul du flux

$$\Phi = \iint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{\text{base}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{\text{latéral}} \vec{E}\cdot d\vec{S} .$$

$$\Phi = \iint_{\text{latéral}} E(r)\, dS = E(r) \iint_{\text{latéral}} dS = E(r) \times (2\pi r l)$$

) Calcul de la charge enlacé Q_{int}

Comme r est compris entre R_1 et R_2, la surface de Gauss entoure uniquement la surface chargée de l'âme interne de rayon R_1. D'après la question 7 :

$$Q_{int} = Q = 2\pi R_1 l \sigma_1$$

En appliquant le Théorème de Gauss

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

)
$$E(r) \times 2\pi r l = \frac{2\pi R_1 l \sigma_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{R_1 \sigma_1}{\varepsilon_0 r}$$

$$E(M) = \frac{R_1 \sigma_1}{\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$$

- Les armatures d'un capacitateur électrostatique à champ électrostatique à l'intérieur de la matière conductrice est identiquement nul ($E = 0$)

Une surface de Gauss cylindrique de rayon $r > R_2$ entoure la charge de l'armature ($+Q$) et celle de la gaine ($-Q$). Par conséquent globalement dans le câble la charge totale entourée est nulle ($Q_{int} = Q - Q = 0$).
Du théorème de Gauss ($\Phi = E(r) \cdot 2\pi r l = 0$) donc $E = 0$ à l'extérieur du câble.

10) Déduire l'énergie électrostatique

$$W_e = \iiint_V w_e(M)\, d\tau \quad \text{avec} \quad w_e(M) = \frac{\varepsilon_0}{2} \|E(M)\|^2$$

** D'après la question 9.

$$Q = 2\pi R_1 l \sigma_1 \Longrightarrow R_1 \sigma_1 = \frac{Q}{2\pi l}$$

En remplaçant par l'expression du champ question 9

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 l r}$$

En intégrant la densité sur le volume d'une longueur l

$$W_e = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 l r}\right)^2 r\, dr$$

$$W_e = 2\pi l \times \frac{\varepsilon_0}{2} \times \frac{Q^2}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 l^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\, dr$$

$$W_e = \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

11) L'énergie électrostatique d'un condensateur de capacité C portant la charge Q s'écrit

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

on note définition de la capacité linéique Γ représente la capacité par unité de longueur ($\Gamma = \frac{C}{l}$)

$$\Gamma = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

** On en déduit que C s'exprime en Farad et donc que Γ s'exprime en Farad par mètre ($F.m^{-1}$).

12) Ain : $C = \frac{2\pi \times 8{,}85\times10^{-12}}{\ln(2)} \approx 8{,}0\times10^{-11}\ F$

$\Gamma \approx 80\ pF.m^{-1}$

Ex 2

1) La concentration initiale en ~~sang~~ dioxygène

$$[O_2]_i = 9{,}2\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

la concentration initiale en sang-unité d'hémoglobine s'obtient

$$[Hb] = \frac{m}{M_{Hb}.V} = \frac{15}{16\times10^3\times0{,}100} = 9{,}375\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

or la ~~concentration~~ constante d'équilibre associée à la réaction (1) vaut $K_1 = 3{,}0\times10^5 >> 10^3$ la réaction de formation de l'oxyhémoglobine est donc quasi totale

$$[O_2]_i = 9{,}2\times10^{-3}\ mol.L^{-1} < [Hb]_i = 9{,}375\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

le dioxygène O_2 (aq) est le réactif limitant

À avancement volumique maximal vaut $x_{max} = [O_2]_i$

$[Hb O_2] = [O_2]_i = 9{,}2 \times 10^{-3}\ mol.L^{-1}$

2) Pour la réaction (1) $Hb_{(aq)} + O_{2(aq)} \rightleftharpoons HbO_{2(aq)}$ la constante de réaction Q_r s'exprime

$$Q_r = \frac{[HbO_2]}{[Hb] \cdot [O_2]}$$

Lorsque le dioxygène est absorbé par les tissus la concentration diminue donc par conséquent Q_r augmente jusqu'à $Q_r > K$

On en conclue que le système évolue dans le sens indirect

$$HbO_{2(aq)} \longrightarrow Hb_{(aq)} + O_{2(aq)}$$

3) d'une part la dissolution du dioxyde de carbone CO_2 dans le sang génère des ions oxonium H_3O^+.

d'autre part le pH est relié à la concentration des ions oxonium par la formule :

$$pH = -\log\left(\frac{[H_3O^+]}{c^\circ}\right)$$

L'augmentation de $[H_3O^+]$ entraine donc directement une diminution du pH lorsque on l'observe d'autre réactions.

~~4) d'une part~~

5) d'une part

D'après l'équation (4) : $Hb_{(aq)} + CO_{(aq)} \rightleftharpoons HbCO_{(aq)}$ on

$$K_4 = \frac{[HbCO]_{eq}}{[Hb]_{eq}[CO]_{eq}}$$

$$\frac{[HbCO]_{eq}}{[Hb]_{eq}} = K_4 \times [CO]_{eq}$$

d'autre part

$K_1 = 2,6 \times 10^7$ et $[CO]_{eq} = 2,0 \times 10^{-5}\ mol\ L^{-1}$

$$\frac{[HbCO]_{eq}}{[Hb]_{eq}} = 7,5 \times 10^{-3} \times 2,0 \times 10^{-5} = 1,5 \times 10^{-4}$$

Cette valeur appartient à l'intervalle $[0,1 \times 10^{-4} ; 3,6 \times 10^{-4}]$ du tabac de l'énoncé. Par conséquent, les effets ressentis par le personne sont les mêmes de Bob

6) d'une part avec l'équation (5) on peut exprimer

$$K_5 = \frac{[HbCO]_{eq} \cdot [O_2]_{eq}}{[HbO_2]_{eq} \cdot [CO]_{eq}}$$

d'autre part

$$K_1 = \frac{[HbO_2]_{eq}}{[Hb]_{eq} \cdot [O_2]_{eq}} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{[HbCO]_{eq}}{[Hb]_{eq} \cdot [CO]_{eq}}$$

$$\iff \frac{K_2}{K_1} = \frac{[HbCO]_{eq} [O_2]_{eq}}{[HbO_2]_{eq} \cdot [CO]_{eq}} = K_5$$

Donc $K_5 = \frac{7,5 \times 10^{-3}}{3,0 \times 10^{-5}} = 2,5 \times 10^2 = 250$

7) d'une part

la réaction hypothèse augmente la concentration en dioxygène donc l'oxygène dans le sang

d'autre part :

le dioxygène étant un produit de la réaction (5), cette augmentation déplace l'équilibre dans le sens indirect d'après le principe de la chaleur.