Félisc
Levavasseur

DM-2

Exo 1 :

Partie 1 :

1. On se place dans un système de coordonnée cylindrique
$\vec{B}(r,\theta,z) = B_r(r,\theta,z)\vec{u_r} + B_\theta(r,\theta,z)\vec{u_\theta} + B_z(r,\theta,z)\vec{u_z}$

Symmétrie :
Le plan de symétrie est : $\Pi_1 = (M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$, $\vec{B} \perp \Pi_1$
donc $\vec{B}(r,\theta,z) = B_\theta(r,\theta,z)\vec{u_\theta}$

Invariances :
Il y a une invariance par translation z et par rotation θ,
donc $\vec{B}(r) = B_\theta(r)\vec{u_\theta}$

2. Th d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 . I_{enlacé}$$
$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = B(r)\oint_0^{2\pi} r\,d\theta = B(r)\times 2\pi r$$

$I_{enlacé} = \iint_S \vec{j}\cdot\vec{dS}$

- pour $0 \le r < R_1$:
$$i = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS} = j_1 . \pi R_1^2 \iff j_1 = \frac{i}{\pi R_1^2}$$
$$I_{enlacé}(r) = \frac{i}{\pi R_1^2}\cdot \pi r^2$$
$$= i\frac{r^2}{R_1^2} \quad \text{donc} \quad B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2}$$

- pour $R_1 \le r \le R_2$:
$I_{enlacé} = i$ donc $B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

- pour $R_2 \le r < R_3$:
$i = j_2 \pi (R_3 - R_2)^2 \iff j_2 = \frac{-i}{\pi (R_3-R_2)^2}$, $I_{enlacé}(r) = i - i\frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3-R_2)^2}$

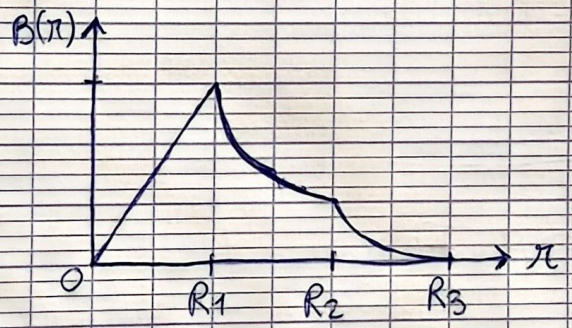
$I_{enlacé} = i \dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$ donc $B(r) = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} \times \dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$

- pour $r \geqslant R_3$:

$I_{enlacé}(r) = i - i = 0$ donc $B(r) = 0$

Finalement :

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2}, & 0 \leqslant r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}, & R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} \times \dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}, & R_2 \leqslant r < R_3 \\ 0 & r \geqslant R_3 \end{cases}$$



3. Etant donné que les courants sont supposés cantonnés dans de très faibles épaisseurs au voisinage de R_1 et R_2, alors cela signifie qu'en dehors de l'intervalle $[R_1, R_2]$, le champ ~~magnét~~ magnétique est nul.

On a alors : $B(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}, & R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \\ 0, & r > R_2 \end{cases}$

4. $$U_m(M) = \frac{\left\| \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right\|^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}$$

Donc $U_m = \iiint_V u_m(M)\, d\tau$

$$= \int_0^{\ell}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}\right) r\, dr$$

$$= \int_0^{\ell}\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2} \left[\ln(r)\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$U_m = \frac{\mu_0 i^2 \ell}{4\pi} \times \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

5. On sait que $U_m = \frac{1}{2} L i^2$ donc :

$$\frac{1}{2} L i^2 = \frac{\mu_0 i^2 \ell}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \text{en H}$$

de plus $\lambda = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ en $H.m^{-1}$

6. AN :

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1}{2\pi} \ln\left(\frac{2\times 10^{-2}}{1\times 10^{-2}}\right)$$

$$= 2\times 10^{-7} \times \ln(2) \approx 1{,}39 \times 10^{-7} \text{ H}.$$

Partie 2 :

7. charge de l'âme :

$$Q = \iint \sigma(M)\, dS = \sigma_1\, 2\pi R_1 \ell$$

charge de la gaine :

$$-Q = \sigma_2\, 2\pi R_2 \ell$$

Donc $\sigma_1\, 2\pi R_1 \ell = -\sigma_2\, 2\pi R_2 \ell$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 \frac{R_2}{R_1}$$

8. On se place en coordonnées cylindrique :
$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\vec{u_r} + E_\theta(r,\theta,z)\vec{u_\theta} + E_z(r,\theta,z)\vec{u_z}$

Symétrie :
Les plans de symétrie sont :
$\Pi_1 = (M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ et $\Pi_2 = (M, \vec{u_\theta}, \vec{u_r})$
donc $\vec{E}(r,\theta,z) = E(r,\theta,z)\vec{u_r}$

Invariances :
Il y a une invariance de translation z, et une de rotation θ, donc $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u_r}$

9. On applique le th de Gauss sur un cylindre fermée de longueur ℓ.

Calcul du flux :
$$\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \oiint_{Slat} \vec{E}.d\vec{S}_{lat} = E(r).2\pi r\ell$$

$$Q_{int} = \sigma_1 \times 2\pi R_1 \ell = Q \times \frac{\ell}{\ell}$$

Théorème de Gauss :
$$\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r).2\pi r\ell = Q \times \frac{\ell}{\varepsilon_0 \ell}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r \ell \varepsilon_0}\vec{u_r}$$

Le champ électrostatique est nul à l'intérieur des conducteurs car il est à l'équilibre électrostatique, il est également nul à l'extérieur du cable ~~car~~ ($r > R_2$) car la charge totale $Q_{int} = Q - Q = 0$ d'après le théorème de Gauss.

10. $$v_e(M) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\| \frac{Q\vec{u_r}}{2\pi r\ell\varepsilon_0}\right\|^2 = \frac{Q^2}{8\pi^2 r^2 \ell^2 \varepsilon_0}$$

donc $$U_e = \iiint_V v_e(M)\, r\, dr = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi^2 \ell^2 \varepsilon_0} \times \frac{1}{r^2} r\, dr$$

Félix
Lavoisier

$$U_e = \int_0^{\ell}\int_0^{2\pi} \frac{Q^2}{8\pi^2 \ell^2 \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi \ell \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

11. $Q = C \times U$

donc $C = \frac{Q}{U}$, $U_e = \frac{1}{2} C U^2$

$$= \frac{4\pi \ell \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

On sait que $V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r \ell \varepsilon_0} dr$$

$$= \frac{Q}{2\pi \ell \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

or $V_1 - V_2 = U$ donc $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \ell \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

$$\Gamma = \frac{C}{\ell} = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad \text{en } F.m^{-1}$$

12. AN: $C = \frac{2\pi \times 1 \times 8{,}85 \times 10^{-12}}{\ln(2)} \approx 8{,}02 \times 10^{-11}$ F

Exc 2:

1. Calculons la concentration initiale d'hémoglobyne :

$$n_{Hb} = \frac{m_{Hb}}{M_{Hb}} = \frac{15}{1{,}6.10^{4}} = 9{,}37.10^{-4} \text{ mol}$$

donc $[Hb] = \frac{9{,}37.10^{-4}}{0{,}1} = 9{,}37.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

Etant donné que le réactif limitant est O_2 car $[O_2] < [Hb]$ et qu'il s'agit d'une transformation quasi totale car la valeur de K_1 est très grande, alors $[HbO_2] \approx [O_2]$

$\approx 9{,}2 \cdot 10^{-3}$ mol/L

2. À ce stade on a $[O_2] = [Hb] = [Hb]_i - [O_2]_i = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ mol/L

donc :

$$Q_i = \frac{[HbO_2]/C^\circ}{\frac{[Hb]}{C^\circ} \times \frac{[O_2]}{C^\circ}} = \frac{9{,}2 \cdot 10^{-3}}{1{,}8 \cdot 10^{-4} \times 3{,}6 \cdot 10^{-5}} \approx 10^6 > K_1$$

donc le système évolue dans le sens direct.

3. Comme la réaction produit des ions de H_3O^+ et que $ph = -\log([H_3O^+])$, cela signifie que $\log([H_3O^+])$ augmente donc le ph diminue.

4. On remarque qu'il y a lien la production de dioxygène suite à la réaction de HbO_2 et H_3O^+ tout en limitant les variations de ph car malgré l'augmentation de H_3O^+ lors de la dissolution de O_2 dans $2H_2O$ il y a par la suite une diminution après la réaction (3).

5. $$K_4 = \frac{[HbCO]}{[Hb] \times [CO]} \Leftrightarrow K_4[CO] = \frac{[HbCO]}{[Hb]}$$

AN : $K_4 \times [CO] = 7{,}5 \times 10^7 \times 2{,}0 \times 10^{-4}$

$= 1{,}5 \times 10^4$

D'après le tableau la personne ne ressent qu'un mal de tête.

6. $$K_5 = \frac{[HbCO] \times [O_2]}{[HbO_2] \times [CO]} = \frac{K_4}{K_1}$$ car $$\frac{K_4}{K_1} = \frac{[HbCO]}{[Hb] \times [CO]} \times \frac{[Hb][O_2]}{[HbO_2]}$$

AN: $K_S = \frac{3,0 \times 10^5}{7,5 \times 10^7} = \frac{7,5 \times 10^7}{3,0 \times 10^5} = 2,5 \times 10^{-2}$

7. D'après l'énoncé $[O_2]$ augmente donc $Q = \frac{[Hb\text{-}CO][O_2]}{[Hb\text{-}O_2][CO]}$ augmente également jusqu'à ce que $Q > K_S$. La transformation étant indirecte et Hb-CO est consommé permettant d'extraire le poison et $Hb\text{-}O_2$ est produit permettant ~~régénérer~~ soigner la personne