DM n°2 : Physique

Prénom
Yann

Exercice 1 : Q1

Système de coordonnées : Cylindrique

$$\vec{B}(M) = B_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + B_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + B_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$$

Symétrie :

$$B(M) = B_r(r,\theta,z)\vec{e}_\theta$$

Invariances :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$$

Q2

$B(r)$ pour $r \in [0, +\infty[$

D'après le théorème d'Ampère :

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I_{enc} = B(r) \times 2\pi r$$

$$j_1 = \frac{I}{\pi R_1^2} \quad \text{et} \quad I_{enc} = j_1 \pi r^2 = \frac{I r^2}{R_1^2}$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \frac{r^2}{R_1^2} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r$$

$I_{enc} = I$ (Dans l'isolant)

$2\pi r B(r) = \mu_0 I$

$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

À l'intérieur de la gaine

$j_2 = \frac{-I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$

$I_{enc} = I + j_2 \pi (r^2 - R_2^2)$

$= I\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$

$= I\left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$

alors $\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}}$

À l'extérieur du câble $I - I = 0$ et $I_{enc} = 0$

$B(r) = 0$

Q4

$$U_m(M) = \frac{\| B(M) \|^2}{2\mu_0}$$

$U_m = \iiint_V U_m(M) \, d\tau$

En coordonnées cylindriques, $d\tau = r \, dr \, d\theta \, dz$

$$\left(B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)$$

$$U_m = \int_0^{\ell} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 r \, dr$$

$$U_m = \ell \times 2\pi \times \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Q5

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\boxed{\Lambda = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$[\Lambda] = H \cdot m^{-1}$$

Q6

AN : $L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1,0}{2\pi} \ln\left(\frac{2 \times 10^{-2}}{10^{-2}}\right)$

$$= 2 \times 10^{-7} \ln(2)$$

$$\boxed{L \approx 1,39 \times 10^{-7} \text{ H} \quad \text{donc } 139 \text{ nH}}$$

Q7



Q8

Symétries :

$\Pi_1 = (M, \vec{U}_r, \vec{U}_y)\ \Pi^+$

$\Pi_2 = (M, \vec{U}_r, \vec{U}_\theta)\ \Pi^+$

$E \subset \Pi_1, \Pi_2$ d'où $\boxed{\vec{E}(r,\theta,y) = E(r,\theta,y)\vec{U}_r}$

Invariances :
translation y et rotation θ

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r)\vec{e}_r$$

Q9

$$Q_{int} = \sigma_1 \times 2\pi R_1 h = Q\frac{h}{l}$$

D'après le théorème de Gauss :

$$\vec{E}(r) \times 2\pi r h = \frac{Q h}{\rho \varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 l r}\vec{e}_r$$

Q 10

$$u_e(M) = \frac{\varepsilon_0}{2} \| \vec{E}(M) \|^2$$

$$U_e = \int_0^{\ell} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell r} \right)^2 r \, dr$$

$$U_e = \ell \times 2\pi \times \frac{\varepsilon_0 Q^2}{8\pi^2 \varepsilon_0^2 \ell^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Q 11

$$U = V(R_1) - V(R_2)$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(M) \cdot \vec{e}_r \, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell r} dr$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad F \cdot m^{-1}}$$

12

$$AN : C = \frac{2\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 1,0}{\ln\left(\frac{2,10 \times 10^{-2}}{1,0 \times 10^{-2}}\right)}$$

$$= \frac{2\pi \times 8,85 \times 10^{-12}}{\ln(2)}$$

$$C \approx \frac{5,56 \times 10^{-11}}{0,693} \approx 8,02 \times 10^{-11} F$$

$$80,2 \text{ pF}$$

Exercice 2 :

Q1

$$n(HO)_i = \frac{m}{M} = \frac{1,5}{1,6 \times 10^4} = 9,4 \times 10^{-4} \text{ mol}$$

$K_1 = 3,0 \times 10^5 \gg 1$ la réaction est donc quasi totale par rapport au réactif limitant (sens direct)

On suppose le réactif entièrement consommé

Soit $[HO_2]_{eq} \approx [HO^-]_i = 9,38 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$

Q2 $[O_2] = 3,6 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$

$$Q_{r,1} = \frac{[HO_2]_{eq}}{[HO^-]_{eq}[O_2]}$$

$Q_{r,1} < K_1$ (sens indirect)