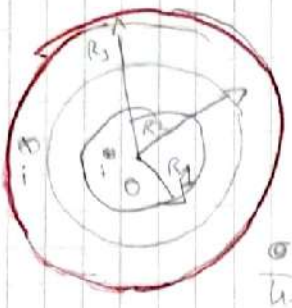
DM2

Exo 1:



Q1

On se place en coordonnées cylindriques, où un point M est placé tel que:

$\vec{B}(M) = B_R(r,\theta,z)\vec{u_r} + B_\theta(r,\theta,z)\vec{u_\theta} + b_z(r,\theta,z)\vec{u_z}$

Le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ contenant le cable et ce point M est plan de symétrie de la distribution de courant le champ $\vec{B}$ est orthogonal à celui-ci, donc

$$\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(r,\theta,z)\vec{u_\theta}}$$

La distribution de courant est invariante par toute translation selon z et par toute rotation selon θ Oz. Ainsi le champ est ondes pendant de z et θ, d'où:

$$\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{u_\theta}}$$

Q2

Application du théorème d'Ampère qui stipule:

$$\oint_C B \cdot dl = \mu_0 I_{int}$$

On choisit un contour d'Ampère C circulaire (contour en rouge sur le schéma) orthogonal au cable et de centre confondu avec le cable et passant par le point M. Ce contour est orienté de sorte que le courant soit compté positivement avec la règle de la main droite

• Calcul de circulation de $\vec{B}(M)$

$$\oint_C \vec{B}(M)\,\vec{dl} = \oint_C B_\theta(r)\,\vec{u_\theta} \cdot r\,d\theta\,\vec{u_\theta} = \oint_C B_\theta(r)\,r\,d\theta$$

$$\boxed{\oint_C \vec{B}(M)\,\vec{dl} = 2\pi r\, B_\theta(r)}$$

• Expression de I_{int}

pour $r < R_1$

$$I_{int} = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS} = \frac{i}{\pi R_1^2} \times \pi r^2 = \boxed{\frac{i\,r^2}{R_1^2}}$$

Pour $R_1 < r < R_2$

$$I_{int} = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS} = \frac{i}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \times \pi(r^2 - R_1^2) = \boxed{i}$$

Pour $R_2 < r < R_3$

Le courant i est négative.

et $\iint dS = S = \pi(R_3^2 - R_2^2)$

donc $I_{int} = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS} = i - i\,\frac{\pi(r^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} = i\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$

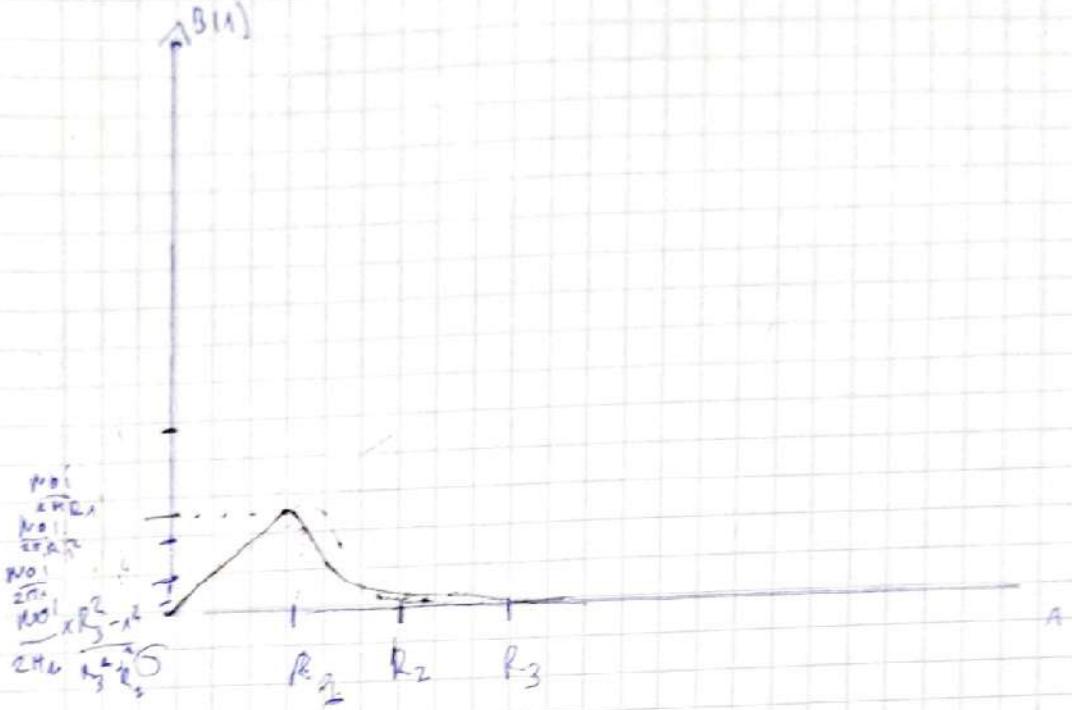
$$i\left(\frac{R_3^2 - R_2^2 - r^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) = \boxed{I_{int} = i\,\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}}$$

pour $r > R_3$

$$\boxed{I_{int} = 0}$$

En appliquant le théorème d'Ampère on a

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2} & \text{si } r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} \times \dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} & \text{si } R_1 < r < R_3 \\ 0 & \text{si } r > R_3 \end{cases}$$



Q4

Densité volumique d'énergie magnétique :

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

En remplaçant B^2 par $(\vec{B}'(M))^2$ pour $R_1 < r < R_2$

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 = \boxed{\frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} = u_m}$$

En effet le domaine d'intégration naturel pour une portion de l'anneau P est le volume cylindrique de vide situé entre $R_1 \leq r \leq R_2$

donc $U_m = \iiint u_m \, dr = \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} u_m \, r \, dr \, d\theta \, dz$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0}{\ell} \times \frac{i^2}{\pi^2 r} \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\ell} dz$$

$$= \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2} \ell \times 2\pi \times \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$U_m = \frac{\mu_0 i^2 \ell}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Q5

On utilise l'expression $U_m = \frac{1}{2} L i^2$ pour déterminer L :

$$\frac{1}{2} L i^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 \ell \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

De plus

$$\Lambda \overset{\text{def}}{=} \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \text{et} \quad [\Lambda] = \frac{[L]}{[\ell]} = \frac{H}{m} = H \cdot m^{-1}$$

L'unité de Λ est $H \cdot m^{-1}$

Q6. A.N

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} H m^{-1} \times 1{,}0\ m \times \ln\left(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}}\right)$$

$$\simeq 2 \times 10^{-7}\ H \times 0{,}69$$

$$L \simeq 1{,}38 \times 10^{-7}\ H$$

Q7

Soit S_1 la surface du cylindre de rayon R_1 et de longueur ℓ. La charge Q vaut :

$$Q = \sigma_1 \cdot S_1 = \sigma_1 (2\pi R_1 \ell)$$

Soit S_2 la surface du cylindre de rayon R_2 et de longueur ℓ.

Sur S_2, répartition de façon ponctuelle une charge $-Q$

donc $-Q = \sigma_2 S_2 = \sigma_2 \, 2\pi R_2 \ell = -\sigma_1 S_1$

Ainsi,

$$\therefore \quad Q = \sigma_1 \, 2\pi R_1 \ell = -\sigma_2 \, 2\pi R_2 \ell$$

$$\boxed{\sigma_2 = -\sigma_1 \frac{R_1}{R_2}}$$

Q8

Les plans $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ et $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges donc

$$\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{u_r}}$$

La distribution de charges est invariante par toute rotation selon θ et toute translation z donc

$$\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u_r}}$$

Q9 Application du théorème de Gauss qui stipule

$$\oint_S \vec{E}(M) \, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On choisit un cylindre coaxial de rayon r, de longueur ℓ, de longueur ℓ comme surface de Gauss

$$\boxed{\Phi = \oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = E_r(r) \times 2\pi r \ell}$$

$$\boxed{Q_{int} = Q}$$

Par le théorème de Gauss on trouve :

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r \ell \varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{2\pi r \ell \varepsilon_0} \vec{u_r}}$$

Pour $r < R_1$

Les charges circulant dans la gaine et l'âme parfaitement conductrices et à l'équilibre électrostatique sont nulles

donc $Q_{int} = 0$ et $\vec{E}(M) = \vec{0}$

De même pour $R_2 < r < R_3$: $Q_{int} = 0$ et $\vec{E}(M) = \vec{0}$

Pour $r > R_3$:

Soit S_3 une surface de Gauss de rayon $r > R_3$ englobe l'âme $(+Q)$ et la gaine $(-Q)$ donc

$Q_{int} = Q - Q = 0$ Donc $\vec{E}(M) = \vec{0}$

Q10

La densité volumique d'énergie électrique s'exprime :

$$u_e(r) = \frac{\varepsilon_0}{2} E_r(r)^2 = \boxed{\frac{Q^2}{8\pi^2 r^2 l^2 \varepsilon_0} = u_e(r)}$$

Le domaine d'intégration non nul est le volume où

$R_1 < r < R_2$

Donc : $W_e = \iiint u_e(r)\, d\tau$

$$W_e = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi^2 r \cdot l^2 \varepsilon_0} \cdot dr$$

$$W_e = l \times 2\pi \times \frac{Q^2}{8\pi^2 l^2 \varepsilon_0} \times \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\boxed{W_e = \frac{Q^2}{4\pi l \varepsilon_0} \times \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Q11.

La capacité est définie par $\boxed{C = \frac{Q}{U}}$

comme $U = V_1 - V_2$, on utilise la relation

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \rho} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\boxed{C = \left(\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)^{-1} \times 2\pi\varepsilon_0 \rho}$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{C}{\rho} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}} \quad \text{et} \quad [\Gamma] : \frac{[C]}{[\rho]} = \frac{F}{m} = F.m^{-1}$$

L'unité de Γ est $F.m^{-1}$

Q12

$$C = \frac{2\pi \times 8,85 \times 10^{-12} F.m^{-1} \times 1,0 m}{\ln\left(\frac{2,0 \times 10^{-2}}{10^{-2}}\right)}$$

$$C = \frac{5,56 \times 10^{-11}}{\ln(2)} = \frac{5,56 \times 10^{-11}}{6,9 \times 10^{-1}} \approx 8 \cdot 10^{-11} F$$

Ex 02

Q1

Commençons par calculer la concentration initiale d'Hb

$$[Hb] : n_0 = \frac{m_0}{M(Hb)}$$

A.N $n_0 = \frac{15 g}{1,6 \times 10^4 g.mol^{-1}} = 9,4 \times 10^{-4} mol$

On a $K = 3,0 \times 10^5 > 10^4$

la réaction est très avancée le dioxygène étant le réactif limitant il serait totalement consommé

donc

$[O_2]_f = n_0 = 9{,}2 \times 10^{-3}$ mol $= x_{max}$

et

Tableau d'avancement

	$Hb_{(aq)}$ +	$O_{2(aq)}$ =	$HbO_{2(aq)}$
E.I	n_0	$[O_2]_0$	0
E.F	$n_0 - x_f$	x_{max}	x_f

$\tau_f = \frac{x_f}{x_{max}} = 1$

La réaction étant quasi-totale

On a $[HbO_2]_f = x_{max} = 9{,}2 \times 10^{-3}$ mol

Q2

$Q_r = \frac{[HbO_2]_i}{[Hb]_i [O_2]_i}$

Ici $[O_2] < [O_2]_i$

donc $Q > Q_{r(i)} = K$

Q3 le système évolue dans le sens direct

Q.3 La dissolution du dioxyde de carbone libère des ions oxonium H_3O^+ dans le sang, $[H_3O^+]$ augmente or $pH = -\log [H_3O^+]$ donc le pH diminue

Q4 :

Selon (3)

$$Q_3 = \frac{[O_2]_{eq}[HbH^+]_{eq}}{[HbO_2]_{eq}[H_3O^+]_{eq}} = \frac{1}{K_1}$$

$Q_3 < K_1$

~~donc~~

Le système évolue dans le sens indirect

Ainsi les ions oxonium H_3O^+ sont consommés ce qui évite la diminution du pH sanguin évoqué à la question 3 et ce qui permet la libération de dioxygène nécessaire à l'effort musculaire.

Q5

Selon (4)

$$K_4 = \frac{[HbCO]_{eq}}{[Hb]_{eq}} \times \frac{1}{[CO]_{eq}}$$

$$\frac{[HbCO]_{eq}}{[HbO_2]_{eq}} = K_4[CO]_{eq}$$

AN

$$\frac{[HbCO]_{eq}}{[Hb]_{eq}} = 7,5 \times 10^{-7} \times 2,0 \times 10^{-4} = 1,5 \times 10^{-4}$$

Au regard du tableau, la personne ressent des maux de tête

Q.6

On remarque :

$$K_S = \frac{[HbCO]_{eq}[O_2]_{eq}}{[HbO_2]_{eq}[CO]_{eq}}$$

$$= \frac{[HbCO]_{eq}}{[Hb]_{eq}[CO]_{eq}} = \frac{[HbCO]_{eq}[Hb]_{eq}[O_2]_{eq}}{[Hb]_{eq}[CO]_{eq}[HbO_2]_{eq}}$$

$$\frac{[Hb]_{eq}[O_2]_{eq}}{[HbO_2]_{eq}}$$

$$\boxed{K_S = \frac{K_4}{K_1}}$$

A.N $K_S = \frac{7,5 \times 10^{-4}}{3,0 \times 10^{-5}} = \boxed{2,5 \times 10^{2} < K_S}$

Q.7

En augmentant la concentration de dioxygène dissous dans le sang $[O_{2(aq)}]$, le quotient de réaction $Q_{r,i}$ augmente $Q_{r,i} > K_S$, ainsi la réaction en sens inverse est favorisée : la sous-unité d'hémoglobine peut à nouveau assurer le transport du dioxygène