DM n°2

exercice 1 :

Q1. Symétrie : Soit M un point quelconque. Le plan (M, u_r, u_z) qui contient M et l'axe du câble, est un plan de symétrie de la distribution de courants : les courants sont portés par $\pm u_z$ et la distribution est de révolution. Le champ magnétique est un pseudo-vecteur, donc en M il perpendiculaire à ce plan : $B(M) = B(M)\, u_\theta$

Invariances : La distribution est invariante par toute rotation autour de (Oz) et, le câble étant infini, par toute translation selon (Oz). B ne dépend donc ni de θ ni de z.

Ainsi $\vec{B}(M) = B(r)\, \vec{u_\theta}$ donc $\vec{u} = \vec{u_\theta}$

Q2. Contour d'ampère : cercle C d'axe (Oz), de rayon r, orienté selon u_θ (la normale associée est u_z). Comme $B = B(r)\, u_\theta$ est tangent et de même constante sur C : $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{enl}$

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2} & 0 \le r \le R_1 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r} & R_1 \le r \le R_2 \\ \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\dfrac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} & R_2 \le r \le R_3 \\ 0 & r \ge R_3 \end{cases}$$

- $0 \le r \le R_1$: $I_{enl} = j_1 \pi r^2 = i\dfrac{r^2}{R_1^2}$
- $R_1 \le r \le R_2$: $I_{enl} = i$
- $R_2 \le r \le R_3$: $I_{enl} = i - i(r^2 - R_2^2)/(R_3^2 - R_2^2) = i(R_3^2 - r^2)/(R_3^2 - R_2^2)$
- $r \ge R_3$: $I_{enl} = i - i = 0$

Q3.

Q4. $$\mathcal{U}_m = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 r\, dr\, d\theta\, dz = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2} \times 2\pi l \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\mathcal{U}_m = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Q5. $\mathcal{U}_m = \frac{1}{2} L i^2$

$\Leftrightarrow L = \dfrac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$ $\qquad \Lambda = \dfrac{L}{l} = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

Λ est en $H.m^{-1}$

Q6. $L = (4\pi \times 10^{-7}/2\pi) \times 1{,}0 \times \ln(2{,}0/1{,}0) = 2\times 10^{-7} \times 0{,}693$

$L \approx 1{,}4 \times 10^{-7}$ H.

Partie 2 : étude électrostatique.

Q7. Charge Q et relation entre σ_1 et σ_2

$$Q = \sigma_1 2\pi R_1 l$$

$$\sigma_1 R_1 = -\sigma_2 R_2 \Leftrightarrow \sigma_2 = -\sigma_1 \frac{R_1}{R_2} < 0$$