Correction : Devoir maison n°2

Exercice n°1 : Le câble coaxial

Partie n°1 : Étude magnétostatique

Q1. Soit un point M où on souhaite exprimer le champ. Le plan qui contient M et l'axe $(O, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie pour la distribution de courant, donc plan d'antisymétrie pour le champ. Ainsi $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan : il est dirigé selon le vecteur $\vec{e}_\theta$ des coordonnées cylindriques. De plus, il y a invariance par translation selon $\vec{e}_z$ et par rotation autour de l'axe, donc le champ ne dépend ni de z ni de θ. Finalement, le champ magnétique en M est de la forme

$$\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta\,.}$$

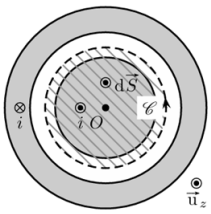
Q2. Les lignes de champ sont des cercles d'axe $(O, \vec{e}_z)$ sur lesquels $B(r)$ est constante. On peut calculer $B(r)$ en utilisant le théorème d'Ampère. Le contour fermé $\mathscr{C}$ utilisé est une ligne de champ magnétique de rayon r, orienté arbitrairement dans le sens trigonométrique (voir figure ci-dessous),

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{B}(r)\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} = \mu_0 I_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I_{\text{int}}}{2\pi r}\,.$$

Il reste à déterminer l'intensité enlacée par le contour en fonction du rayon r. Par définition, cette intensité traverse la surface $\mathscr{S}$ (hachurée sur la figure ci-dessous s'appuyant sur le contour $\mathscr{C}$,

$$I_{\text{int}} = \iint_{\mathscr{S}} \vec{j}(r)\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \int_0^r j(r)2\pi r\mathrm{d}r$$

où $\vec{j}(r) = j(r)\vec{e}_z$ dépend de l'endroit considéré.



— Premier cas : si $r \in [0, R_1]$, j est tel que $i = j \times \pi R_1^2$, donc $j(r) = \frac{i}{\pi R_1^2}$ et

$$I_{\text{int}} = i\frac{r^2}{R_1^2} \Rightarrow \boxed{\forall r \in [0, R_1], B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2}\,.}$$

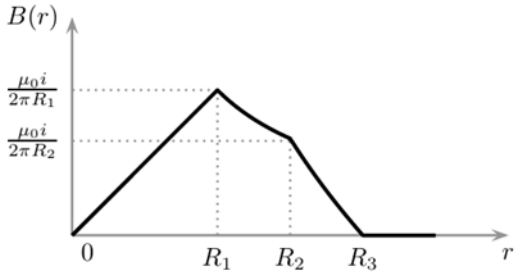
— Deuxième cas : si $r \in [R_1, R_2]$, $j(r) = 0$. L'intensité enlacée est donc simplement l'intensité circulant dans le cylindre central,

$$I_{\text{int}} = i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\forall r \in [R_1, R_2], B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,.}$$

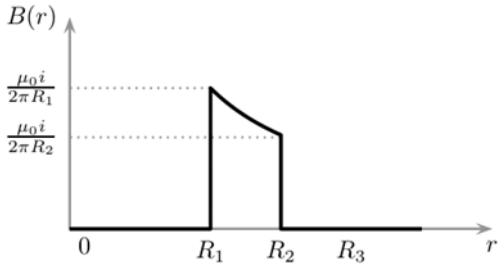
— Troisième cas : si $r \in [R_2, R_3]$, j est tel que $-i = j \times \pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)$, donc $j(r) = -\dfrac{i}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}$ et $I_{\text{int}} = i + \displaystyle\int_{R_2}^r \frac{-i}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)} 2\pi r\mathrm{d}r$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\forall r \in [R_2, R_3], B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \times \left[1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right]\,.}$$

— Quatrième cas : si $r \in [R_3, +\infty[, j = 0$. **L'intensité enlacée est $i - i = 0$. Le champ magnétique est donc nul à l'extérieur du câble coaxial**.



Q3. Dans le cas où l'intensité du câble interne est cantonnée au voisinage de R_1, l'intensité enlacée est nulle sur $\left[0, R_1^-\right]$, puis passe brutalement à i sur l'intervalle $\left[R_1^-, R_1^+\right]$, ce qui crée une discontinuité de $\overrightarrow{B}$. De même, sur le câble périphérique, tout se passe comme si R_3 tendait vers R_2, d'où une autre discontinuité à cet endroit. Ainsi le graphe de la figure ci-dessus devient celui de la figure ci-dessous. Seul l'intervalle $[R_1, R_2]$ a des propriétés inchangées.



Q4. La densité volumique d'énergie magnétique s'écrit $u_\text{m} = \frac{B^2}{2\mu_0}$ et s'exprime en $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$. Elle n'est non nulle que dans l'intervalle $[R_1, R_2]$, où elle vaut $u_\text{m} = \frac{1}{2\mu_0} \times \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2$. Pour avoir l'énergie magnétique dans la zone considérée, on l'intègre sur le volume s'étendant de $z = 0$ à $z = \ell$,

$$U_\text{m} = \int_{z=0}^{\ell} \int_{r=R_1}^{R_2} u_m \underbrace{2\pi r \mathrm{d}r \mathrm{d}z}_{=\mathrm{d}\tau} \Rightarrow \boxed{U_\text{m} = \frac{1}{4\pi}\mu_0 \ell i^2 \ln\frac{R_2}{R_1}.}$$

Q5. En identifiant avec la relation $U_\text{m} = \dfrac{1}{2} L i^2$, on obtient

$$\boxed{L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ell \ln\frac{R_2}{R_1}.}$$

En divisant par la longueur ℓ, on obtient l'inductance linéique,

$$\boxed{\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}.}$$

Q6. Avec les valeurs proposées, on trouve $\boxed{L = 1{,}4 \times 10^{-7}\,\text{H}.}$

Partie n°2 : Étude électrostatique

Q7. La charge Q est répartie uniformément sur la surface latérale de l'âme, de rayon R_1 et de longueur ℓ. Cette surface ayant pour aire $2\pi R_1 \ell$, on obtient :

$$\boxed{Q = 2\pi R_1 \ell \sigma_1}.$$

De même, la charge portée par la surface intérieure de la gaine sur cette longueur vaut :

$$Q_{\text{gaine}} = 2\pi R_2 \ell \sigma_2.$$

La neutralité du câble impose $Q + Q_{\text{gaine}} = 0$, soit :

$$2\pi R_1 \ell \sigma_1 + 2\pi R_2 \ell \sigma_2 = 0.$$

Après simplification :

$$\boxed{R_1 \sigma_1 = -R_2 \sigma_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\sigma_2 = -\frac{R_1}{R_2}\sigma_1}.$$

Q8. Symétries :

Pour un point M situé entre les armatures, le plan contenant M et l'axe du câble est un plan de symétrie de la distribution de charges. Le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe est également un plan de symétrie. Le champ électrostatique appartient à chacun de ces deux plans. Il est donc dirigé suivant leur intersection, c'est-à-dire suivant la direction radiale :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\, \vec{u}_r.$$

Invariances :

La distribution de charges est invariante par translation suivant l'axe du câble et par rotation autour de cet axe. La composante radiale du champ ne dépend donc ni de z ni de θ :

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\, \vec{u}_r}.$$

Q9. On choisit comme surface de Gauss un cylindre fermé Σ, coaxial au câble, de rayon r tel que $R_1 < r < R_2$ et de longueur ℓ.

Le champ étant radial, son flux à travers les deux bases est nul. Sur la surface latérale, il est normal à la surface et sa norme est constante. Le flux total vaut donc :

$$\Phi_E = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E(r)\, 2\pi r \ell.$$

La charge intérieure à cette surface est la charge Q portée par la portion d'âme de longueur ℓ. Le théorème de Gauss donne :

$$E(r)\, 2\pi r \ell = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi, entre les deux armatures :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell r}\, \vec{u}_r = \frac{R_1 \sigma_1}{\varepsilon_0 r}\, \vec{u}_r}.$$

Puisque $Q > 0$, le champ est dirigé de l'âme vers la gaine.

Dans les conducteurs, le champ est nul à l'équilibre électrostatique :

$$\vec{E} = \vec{0} \qquad \text{pour } r < R_1 \quad \text{et pour } R_2 < r < R_3.$$

À l'extérieur du câble, pour $r > R_3$, une surface de Gauss cylindrique de longueur ℓ enferme une charge totale $Q - Q = 0$. Les mêmes arguments de symétrie donnent :

$$E(r)\, 2\pi r \ell = 0, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\vec{E} = \vec{0}}.$$

Q10. Le champ électrique étant nul en dehors de l'espace entre les armatures, l'énergie électrique est entièrement stockée dans la région $R_1 < r < R_2$.

D'après l'expression de la densité volumique d'énergie :

$$U_\text{e} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r)\,\mathrm{d}\tau.$$

En coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

Pour une portion de câble de longueur ℓ, on obtient :

$$U_\text{e} = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell r}\right)^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

L'intégrande ne dépendant ni de θ ni de z :

$$U_\text{e} = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0\ell^2} \times 2\pi\ell \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Finalement :

$$\boxed{U_\text{e} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Q11. La capacité du condensateur est définie par :

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}, \qquad \text{soit} \qquad U = \frac{Q}{C}.$$

L'énergie électrique stockée s'écrit donc :

$$U_\text{e} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}C\left(\frac{Q}{C}\right)^2 = \frac{Q^2}{2C}.$$

En identifiant cette expression à celle obtenue à la question précédente :

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

On en déduit :

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0\ell}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}}.$$

La capacité est proportionnelle à la longueur de câble. Sa capacité linéique vaut :

$$\boxed{\Gamma = \frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}}.$$

Elle s'exprime en farads par mètre :

$$\boxed{[\Gamma] = \mathrm{F\,m^{-1}}}.$$

Q12. Pour $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ et $R_2 = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, le rapport des rayons vaut $R_2/R_1 = 2$. Ainsi :

$$\Gamma = \frac{2\pi \times 8{,}85 \times 10^{-12}}{\ln 2} \simeq 8{,}0 \times 10^{-11}\,\mathrm{F\,m^{-1}}.$$

Soit :

$$\boxed{\Gamma \simeq 80\,\mathrm{pF\,m^{-1}}}.$$

Pour une portion de longueur $\ell = 1{,}0\,\mathrm{m}$:

$$C = \Gamma\ell, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C \simeq 80\,\mathrm{pF}}.$$

Exercice n°2 : Transport de dioxygène dans le sang

On assimile les solutions à des solutions idéales diluées. On note $c^\circ = 1\,\text{mol}\,\text{L}^{-1}$ la concentration standard.

Q1. La concentration initiale en sous-unités d'hémoglobine est :

$$[\text{Hb}]_\text{i} = \frac{m}{M_\text{Hb} V} = \frac{15}{1{,}6 \times 10^4 \times 0{,}100} = 9{,}375 \times 10^{-3}\,\text{mol}\,\text{L}^{-1}.$$

La réaction étudiée est :

$$\text{Hb}_{(aq)} + \text{O}_{2(aq)} = \text{HbO}_{2(aq)}.$$

Comme $K_1 = 3{,}0 \times 10^5 \gg 10^4$, on fait l'hypothèse que la réaction est **très avancée** : l'avancement final est proche de l'avancement maximal.

On note $x = \xi/V$ l'avancement volumique. Le tableau d'avancement en concentrations s'écrit :

	Hb	O_2	HbO_2
État initial	$[\text{Hb}]_\text{i}$	$[\text{O}_2]_\text{i}$	0
État final	$[\text{Hb}]_\text{i} - x_\text{f}$	$[\text{O}_2]_\text{i} - x_\text{f}$	x_f

Les coefficients stœchiométriques étant égaux à 1 et les concentrations initiales vérifiant :

$$[\text{O}_2]_\text{i} = 9{,}2 \times 10^{-3}\,\text{mol}\,\text{L}^{-1} < [\text{Hb}]_\text{i} = 9{,}375 \times 10^{-3}\,\text{mol}\,\text{L}^{-1},$$

le **dioxygène est le réactif limitant**.

Ainsi :

$$x_\text{f} \simeq x_\text{max} = [\text{O}_2]_\text{i}.$$

La concentration finale en oxyhémoglobine vaut donc :

$$\boxed{[\text{HbO}_2]_\text{f} \simeq 9{,}2 \times 10^{-3}\,\text{mol}\,\text{L}^{-1}}.$$

Vérification : le calcul d'équilibre sans approximation donne $[\text{HbO}_2]_\text{f} \simeq 9{,}09 \times 10^{-3}\,\text{mol}\,\text{L}^{-1}$. L'écart est d'environ 1,2 % : l'approximation convient pour déterminer la concentration en produit formé. Elle ne signifie cependant pas que le dioxygène a totalement disparu à l'équilibre.

Q2. Le quotient de réaction associé à la réaction (1) est :

$$Q_{\text{r},1} = \frac{[\text{HbO}_2]/c^\circ}{([\text{Hb}]/c^\circ)([\text{O}_2]/c^\circ)} = \frac{[\text{HbO}_2]c^\circ}{[\text{Hb}][\text{O}_2]}.$$

À la sortie des poumons, le système est à l'équilibre :

$$Q_{\text{r},1} = K_1.$$

Au niveau des tissus, du dioxygène dissous est consommé : sa concentration diminue. Avant le réajustement de l'équilibre, les concentrations en Hb et en HbO_2 sont inchangées.

Le dioxygène apparaissant au dénominateur du quotient de réaction, cette diminution entraîne :

$$\boxed{Q_{\text{r},1} > K_1}.$$

Le système évolue donc dans le **sens indirect** de la réaction (1) :

$$\text{HbO}_{2(aq)} \longrightarrow \text{Hb}_{(aq)} + \text{O}_{2(aq)}.$$

L'oxyhémoglobine libère du dioxygène, qui peut être consommé par les tissus. Ce raisonnement ne nécessite pas de calculer numériquement les concentrations résiduelles de la question précédente.

Q3. La réaction associée à la dissolution du dioxyde de carbone s'écrit :

$$CO_{2(aq)} + 2\,H_2O_{(\ell)} = HCO_{3\,(aq)}^{-} + H_3O^{+}{}_{(aq)}.$$

Son évolution dans le sens direct produit des ions oxonium. En l'absence d'autres réactions, leur concentration augmente.

Or :

$$pH = -\log_{10}\left(\frac{[H_3O^+]}{c^\circ}\right).$$

Une augmentation de $[H_3O^+]$ entraîne donc une **diminution du pH sanguin**.

Q4. La réaction (3) s'écrit :

$$HbO_{2(aq)} + H_3O^{+}{}_{(aq)} = O_{2(aq)} + HbH^{+}{}_{(aq)} + H_2O_{(\ell)}.$$

L'eau étant le solvant, son activité vaut 1. Le quotient de réaction est donc :

$$Q_{r,3} = \frac{[O_2][HbH^+]}{[HbO_2][H_3O^+]}.$$

Initialement à l'équilibre, le système vérifie $Q_{r,3} = K_3$. Lors d'un effort musculaire, la réaction (2) produit des ions oxonium : leur concentration augmente.

Avant le réajustement des autres concentrations, le quotient de réaction diminue et devient :

$$Q_{r,3} < K_3.$$

Le système évolue donc dans le **sens direct** de la réaction (3). Cette évolution :

- **libère du dioxygène**, qui peut être consommé par les muscles lors de l'effort ;
- **consomme des ions oxonium**, ce qui limite leur accumulation et donc la diminution du pH provoquée par la dissolution du dioxyde de carbone.

En additionnant les réactions (2) et (3), on obtient le bilan :

$$CO_{2(aq)} + HbO_{2(aq)} + H_2O_{(\ell)} = HCO_{3\,(aq)}^{-} + O_{2(aq)} + HbH^{+}{}_{(aq)}.$$

Les ions oxonium produits par la réaction (2) peuvent ainsi être consommés par la réaction (3). Ce mécanisme contribue à **limiter la variation du pH sanguin**, sans imposer un pH parfaitement constant.

Q5. Pour la réaction :

$$Hb_{(aq)} + CO_{(aq)} = HbCO_{(aq)},$$

la constante d'équilibre vaut :

$$K_4 = \frac{[HbCO]_{eq}\,c^\circ}{[Hb]_{eq}[CO]_{eq}}.$$

On en déduit :

$$\frac{[HbCO]_{eq}}{[Hb]_{eq}} = K_4\frac{[CO]_{eq}}{c^\circ}.$$

Avec $K_4 = 7{,}5 \times 10^7$ et $[CO]_{eq} = 2{,}0 \times 10^{-4}\,\text{mol}\,\text{L}^{-1}$:

$$\frac{[HbCO]_{eq}}{[Hb]_{eq}} = 7{,}5 \times 10^7 \times 2{,}0 \times 10^{-4}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{[HbCO]_{eq}}{[Hb]_{eq}} = 1{,}5 \times 10^4}.$$

Ce rapport est compris entre $1{,}1 \times 10^4$ et $2{,}6 \times 10^4$. D'après le tableau fourni, la personne ressent donc des **maux de tête**.

Q6. La réaction (5) :

$$HbO_{2(aq)} + CO_{(aq)} = HbCO_{(aq)} + O_{2(aq)}$$

est obtenue en ajoutant la réaction (4) à l'inverse de la réaction (1) :

$$Hb + CO = HbCO,$$
$$HbO_2 = Hb + O_2.$$

Sa constante d'équilibre s'écrit :

$$\boxed{K_5 = \frac{[HbCO]_{eq}[O_2]_{eq}}{[HbO_2]_{eq}[CO]_{eq}}}.$$

À partir des expressions de K_1 et K_4 :

$$\frac{K_4}{K_1} = \frac{[HbCO]_{eq}c^\circ}{[Hb]_{eq}[CO]_{eq}} \times \frac{[Hb]_{eq}[O_2]_{eq}}{[HbO_2]_{eq}c^\circ}.$$

Après simplification :

$$\boxed{K_5 = \frac{K_4}{K_1}}.$$

Numériquement :

$$\boxed{K_5 = \frac{7{,}5 \times 10^7}{3{,}0 \times 10^5} = 2{,}5 \times 10^2 = 250}.$$

Q7. Le caisson hyperbare permet d'augmenter la concentration en dioxygène dissous dans le sang.
Le quotient de réaction associé à la réaction (5) est :

$$Q_{r,5} = \frac{[HbCO][O_2]}{[HbO_2][CO]}.$$

À partir d'un état d'équilibre, une augmentation de $[O_2]$, les autres concentrations étant initialement inchangées, augmente ce quotient.
À température constante, K_5 reste inchangée. On a donc :

$$Q_{r,5} > K_5.$$

Le système évolue alors dans le **sens indirect** de la réaction (5) :

$$HbCO_{(aq)} + O_{2(aq)} \longrightarrow HbO_{2(aq)} + CO_{(aq)}.$$

L'augmentation de la concentration en dioxygène favorise donc la **libération du monoxyde de carbone fixé sur l'hémoglobine** et la **formation d'oxyhémoglobine**, permettant de rétablir le transport du dioxygène.